OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2010

02 de outubro de 2010.

Nível 3– (1º e 2º anos do Ensino Médio)

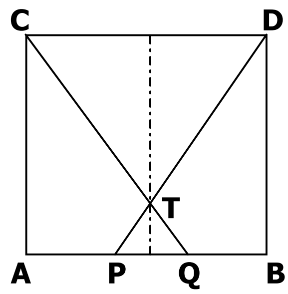
PROVA DISCURSIVA (20 pontos por questão)

QUESTÃO 1

Seja ABC um triângulo retângulo em A e M o ponto médio de BC. Sejam *r* e *s* duas retas perpendiculares que se cruzam em M. Estas retas cortam AC e AB em R e S respectivamente. Determine o valor mínimo de RS em função de BC.

QUESTÃO 2

Considere um quadrado ABCD de lado 1. Sejam P e Q pontos em AB tais que T, a interseção de DQ e CP, não está fora do quadrado ABCD. Sendo *x* a medida do segmento PQ, defina a função $f:[0,1]\to R$ tal que $f(x)$ é a soma das áreas dos triângulos PQT e CDT.



a) Determine $f(x)$ em função de *x* (deve ficar claro que a expressão só depende de *x*);

b) Determine o valor mínimo de $f(x)$;

c) Determine o valor máximo de $f(x)$.

QUESTÃO 3

Determine todos os *m* tais que a equação $x^2+(10-m)x+m=0$ possui duas raízes inteiras.

QUESTÃO 4

Considere uma turma com *n* alunos (2 deles são Miguel e Rodrigo). Considere todas as comissões de *p* alunos que podem ser formadas nessa turma. Uma dessas comissões é escolhida ao acaso. Sabendo-se que Miguel é um aluno dessa comissão, qual é a probabilidade de Rodrigo também estar na mesma comissão?

QUESTÃO 5

Sejam *d* e *n* números naturais. Prove que se *d* é um divisor próprio de *n*, então, $2^{n-1}+2^{d-1}-1$ é um número composto.

Observação 1: Os divisores próprios de um número *k* são os divisores maiores que 1 e menores que *k*.

Observação 2: Um número natural é chamado de composto se for maior que 1 e não for primo.

QUESTÃO 6

Considere um ângulo XOY e uma circunferência variável tangente a este ângulo nos pontos A e B (A em OX, B em OY). Considere um ponto fixo C na semi-reta OX. As tangentes a essa circunferência que saem de C a tocam em A e D. Prove que a reta BD passa por um ponto fixo quando a circunferência varia.