OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2009

10 de outubro de 2009.

Nível 3– (1º e 2º anos do Ensino Médio)

***PROVA DISCURSIVA** (20 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

O número 2009 tem a propriedade de poder ser escrito como soma ou diferença de potências de 7, a saber $2009 = 7^4 - 7^3 - 7^2$. Um outro exemplo seria $50 = 7^2 + 7^0$. Ache o menor número maior que 2500 com essa mesma propriedade.

QUESTÃO 2

Prove que $9^x - 2 . 6^x + 4^x \geq 0$ para todo x real.

QUESTÃO 3

Dados a e b inteiros, defina sequência x_n para n = 0; 1; ... tal que $x_0 = a$, $x_1 = b$ e $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. Que relação a e b devem satisfazer para que $a_{2009} = 2009^2$.

QUESTÃO 4

Determine todos os polinômios P com coeficientes reais tais que P(a) + P(b) + P(c) = 0 sempre que a, b e c sejam números reais com a + b + c = 0.

QUESTÃO 5

Determinar todos os ângulos α e β agudos tais que:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}^2(\beta) = \text{sen}(\alpha + \beta):$$

QUESTÃO 6

Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência Γ. Sejam D, E e F os pontos médios de BC, AC e AB respectivamente. Seja r a tangente a Γ em A e Q e P as interseções de DE e DF com r. Sejam também S e R as interseções de PB e QC com Γ. Prove que r, RS e BC são concorrentes.

QUESTÃO 7

Diz-se que um número é marreco se a soma dos quadrados dos seus dígitos é igual à soma dos seus divisores próprios positivos, um divisor de um inteiro positivo m é dito próprio se é diferente de 1 e m.

1. Dê um exemplo de número marreco.
2. Prove que existe uma quantidade finita de números marrecos.

QUESTÃO 8

Seja a(m; n) o número de maneiras de escrever os números 1; 2; ...;mn nas casas de um tabuleiro m x n de modo que cada número apareça exatamente uma vez, e de modo que em cada linha e em cada coluna os números estejam em ordem crescente (da esquerda para direita e de baixo para cima).

Prove que:

1. $a(2; n) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$
2. $a(3; n) = \dfrac{2\,(3n)!}{n!\,(n+1)!(n+2)!}$