# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
# DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2009

10 de outubro de 2009.

***<u>Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)</u>***

***PARTE OBJETIVA (10 pontos por questão)***

---

**QUESTÃO 1**

O Sudoku é um quebra cabeças que consiste em preencher uma tabela composta de 81 posições (9 linhas x 9 colunas), utilizando apenas os números inteiros de 1 a 9. As regras são as seguintes: Em cada linha ou coluna devem aparecer todos números de 1 a 9, não pode haver repetição de nenhum deles na mesma coluna, ou na mesma linha. Além disso, a tabela ainda está subdividida em 9 sub-regiões 3 x 3 que também devem conter os números de 1 a 9, sem que haja números repetidos na mesma região. Dito isto, preencha o sudoku ao lado e a seguir calcule o valor de: (💣 - ☠)$^2$ + 💻

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | 3 | 2 | | 8 | 6 | |
| 2 | | 9 | | | | | 4 | |
| 8 | | 💣 | 1 | 5 | 4 | | | 2 |
| | 2 | | 9 | 1 | 5 | 4 | | 6 |
| | | 5 | | 4 | | 2 | | ☠ |
| 4 | 1 | 3 | 8 | | | | 7 | |
| 1 | | | 2 | | 6 | | 5 | |
| | 6 | | | 3 | | 1 | | 4 |
| 3 | 5 | | 💻 | 7 | 1 | | 8 | 9 |

**<u>Solução</u>**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 1 | 3 | 2 | 9 | 8 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 9 | 6 | 8 | 7 | 5 | 4 | 1 |
| 8 | 7 | (💣) 6 | 1 | 5 | 4 | 3 | 9 | 2 |
| 7 | 2 | 8 | 9 | 1 | 5 | 4 | 3 | 6 |
| 6 | 9 | 5 | 7 | 4 | 3 | 2 | 1 | (☠) 8 |
| 4 | 1 | 3 | 8 | 6 | 2 | 9 | 7 | 5 |
| 1 | 8 | 4 | 2 | 9 | 6 | 7 | 5 | 3 |
| 9 | 6 | 7 | 5 | 3 | 8 | 1 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 2 | (💻) 4 | 7 | 1 | 6 | 8 | 9 |

💣 = 6
☠ = 8
💻 = 4
Logo

(💣 - ☠)$^2$ + 💻 → $(6 – 8)^2 + 4$ → $(- 2)^2 + 4$ → $4 + 4 = 8$

---

# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2009

10 de outubro de 2009.

***Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)***

**QUESTÃO 2**

João não pagou a conta de telefone que venceu no dia 02/09/2009 (4ª feira), no valor de R$57,00. Como seu pagamento é depositado no banco todo dia 10 de cada mês, ele só poderá pagar esta conta no dia de seu pagamento. Sabendo que ele deverá pagar um juro de 1% ao dia e considerando-se até sábado e domingo. Qual é o valor total da conta que ele deverá pagar?

**Solução**

57 x 1,08 = R$ 61,56

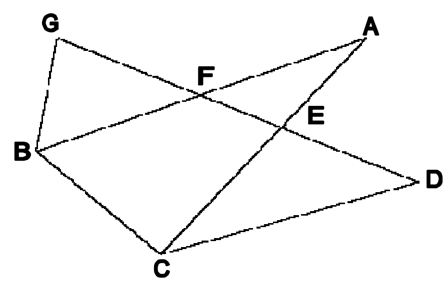
---

**QUESTÃO 3**

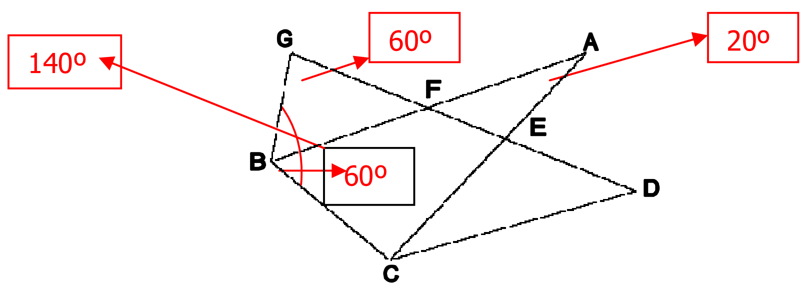
Na figura ao lado,

BÂC = 20º, $C\hat{B}A$ = $F\hat{G}B$ = 60º e $G\hat{B}C$ = 140º.

Qual o valor do ângulo DÊC.




**Solução**




No triangulo ABC, temos 60 + 20 = 80 – 180 = 100º, logo C = 100º

No triangulo FGB, temos B = 140 – 60 = 80º, logo F = 180 – (60 + 80) = 40º

No quadrilátero BCEF, temos B = 60º, F = 140º, C = 100º, logo E = 360º - (60 + 140 + 100) = 60º

No triangulo DEC, temos E = 180-60, logo E = 120º

---

# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
# DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2009

10 de outubro de 2009.

***<u>Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)</u>***

**QUESTÃO 4**

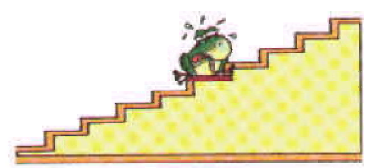
Um sapo sobe uma escada saltando de um em um ou de dois em dois degraus, mas não consegue saltar de três em três. A escada possui dez degraus e obrigatoriamente o sapo pára no sexto degrau para descansar. De quantas maneiras diferentes o sapo pode subir até o topo dessa escada?

**<u>Solução</u>**

Para chegar até o sexto degrau o sapo pode saltar de diferentes maneiras:

Formas diferentes do sapo chegar ao sexto degrau.

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 (pulando de 1 em 1)
1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6 (pulando do 4° ao 6°)
1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 6 (pulando do 3° ao 5°)
1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 (pulando do 2° ao 4°)
1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6 (pulando do 1 ° ao 3°)
2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 (pulando do inicio ao 2°)
1 + 1 + 2 + 2 = 6 (do 2° ao 4° e do 4° ao 6°)
1 + 2 + 1 + 2 = 6 (do 1 ° ao 3° e do 4° ao 6°)
1 + 2 + 2 + 1 = 6 (do 1° ao 3° e do 3° ao 5°)
2 + 1 + 1 + 2 = 6 (do inicio ao 2° e do 4° ao 6°)
2 + 1 + 2 + 1 = 6 (do inicio ao 2° e do 3° ao 5°)
2 + 2 + 1 + 1 = 6 (do inicio ao 2° e do 2° ao 4°)
2 + 2 + 2 = 6 (pulando de 2 em 2)



13 formas diferentes de chegar ao 6º andar.

Formas de chegar ao 10° andar partindo do 6°:

6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10 (pulando de um em um)
6 + 1 + 1 + 2 = 10 (pulando do 8° ao 10°)
6 + 1 + 2 + 1 = 10 (pulando do 7° ao 9º)
6 + 2 + 1 + 1 = 10 (pulando do 6° ao 8°)
6 + 2 + 2 = 10 (do 6° ao 8° e do 8° ao 10°)

5 formas diferentes de chegar ao 10º andar, começando do 6º andar.

Multiplicando os resultados, temos: 13 x 5 = 65

65 formas diferentes de ir até o 10º andar, parando no 6º andar.

***PARTE DISCURSIVA (20 pontos por questão)***

---

**QUESTÃO 5**

Escrevendo-se os números inteiros ímpares positivos a partir de 1 até 2009, sem separar os algarismos, obtemos um número: 1357911131517...2009. Qual o 2009º algarismo deste número?

**Solução**

| intervalo | Quantidade de números $\frac{l_{sup} - l_{inf}}{2} + 1$ | Quantidade de algarismos "Quantidade de números x quantidade de algarismos do número" | Total |
|---|---|---|---|
| 1 a 9 | $\frac{9-1}{2}+1=5$ | 5 . 1 = 5 | 5 |
| 11 a 99 | $\frac{99-11}{2}+1=45$ | 45 . 2 = 90 | 95 |
| 101 a 999 | $\frac{999-101}{2}+1=450$ | 450 . 3 = 1350 | 1445 |
| 1001 a x | $\frac{x-1001}{2}+1=y$ | y . 4 = 564 | 2009 |

2009 - 1445 = 564

y = 564 : 4 = 141

x – 1001 = 2 (y - 1)

x = 1001 +280

x = 1281

Assim o algarismo 2009º é o 1.

---

# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
# DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2009

10 de outubro de 2009.

***<u>Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)</u>***

**QUESTÃO 6**

Dois jogadores de futebol de botão disputam um torneio em 55 partidas com as seguintes regras:

- nas 30 partidas iniciais o vencedor ganha 3 pontos por partida, e nas 25 partidas restantes, o vencedor ganha 2 pontos;
- o perdedor não ganha pontos por partida;
- nenhuma partida pode terminar empatada.

Sabendo que um dos jogadores já ganhou 19 partidas das 35 iniciais, calcule o número mínimo de partidas que o outro jogador deverá vencer, dentre as 20 restantes, para que se torne o vencedor.

**<u>Solução</u>**

As possibilidades são:

<table>
<tr><th></th><th>1ª fase</th><th>2ª fase</th><th>Total de pontos possíveis</th></tr>
<tr><td rowspan="6">A</td><td>14</td><td>5</td><td>14.3 + 5.2 = 52</td></tr>
<tr><td>15</td><td>4</td><td>15.3 + 4.2 = 53</td></tr>
<tr><td>16</td><td>3</td><td>16.3 + 3.2 = 54</td></tr>
<tr><td>17</td><td>2</td><td>17.3 + 2.2 = 55</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1</td><td>18.3 + 1.2 = 56</td></tr>
<tr><td>19</td><td>0</td><td>19.3 + 0.2 = 57</td></tr>
<tr><td rowspan="6">B</td><td>16</td><td>0</td><td>16.3 + 0.2 = 48</td></tr>
<tr><td>15</td><td>1</td><td>15.3 + 1.2 = 47</td></tr>
<tr><td>14</td><td>2</td><td>14.3 + 2.2 = 46</td></tr>
<tr><td>13</td><td>3</td><td>13.3 + 3.2 = 45</td></tr>
<tr><td>12</td><td>4</td><td>12.3 + 4.2 = 44</td></tr>
<tr><td>11</td><td>5</td><td>11.3 + 5.2 = 43</td></tr>
</table>

A pontuação desse jogador está entre 43 e 48 pontos.

O total de pontos disputados no torneio são 140 (30.3 + 25.2 = 90 + 50).

Um vencedor terá necessariamente que obter a metade mais um do total de pontos, o que equivale a 71.

Logo, consideraremos a pior situação possível que seria ele ter 43 pontos. Então, ainda faltam 28 pontos para se chegar a 71, sendo que já estão sendo disputadas as partidas finais, onde a vitória vale 2 pts.

Portanto, ele precisará vencer ainda 14 partidas das 20 que ainda restam.

**QUESTÃO 7**

Sejam *p* e *q* dois números primos positivos diferentes, Prove que existem inteiros positivos *a* e *b*, tais que a média aritmética de todos os divisores positivos do número $\mathbf{n = p^a \cdot q^b}$ é um numeral inteiro.

**Resposta:**

A soma de todos os divisores de n é dada pela fórmula:

$$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)$$

Como se pode comprovar desenvolvendo os parênteses. O número n tem (a + 1). (b + 1) divisores positivos e a média aritmética de todos eles é:

$$m = \frac{\left(1+p+p^2+\ldots+p^a\right)\left(1+q+q^2+\ldots+q^b\right)}{(a+1)\,(b+1)}$$

Se p e q são ambos ímpares, tomamos a = p e b = q, é fácil se ver que m é um inteiro.

Efetivamente cada fator $1 + p + p^2 + p^3 + ... + p^p$ e $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^q$ tem um número par de parcelas e, por exemplo, o primeiro pode ser escrito como segue:

$$1 + p + p^2 + p^3 + ... + p^p = (1 + p) + (1 + p)\,p^2 + (1 + p)\,p^{p-1} = (1 + p)\,(1 + p^2 + ... + p^{p-1})$$

Analogamente o segundo fator

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^q = (1 + q)\,(1 + q^2 + ... + q^{q-1})$$

Então $m = (1 + p^2 + p^4 + ... + p^{p-1})\,(1 + q^2 + q^4 + ... + q^{q-1})$, que é um inteiro positivo.

Se p = 2 e q é ímpar, se atribuem b = q e $a + 1 = 1 + q^2 + q^4 + ... + q^{q-1}$. Então:

$$m = \frac{\left(1+2+2^2+\ldots+2^{q^2+q^4+\ldots+q^{q-1}}\right)\left(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^q\right)}{\left(1+q^2+q^4+\ldots+q^{n-1}\right)(q+1)}$$

$$m = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^4, \text{ que é inteiro.}$$

Para q = 2 e p ímpar, como no caso anterior, se atribuem a = p e $b = p^2 + p^4 + ... + p^{n-1}$ e m é inteiro.

Alternativamente e de maneira quase direta, se obtém uma solução completa observando que se p e q são primos ímpares se tomam a = b = 1 e se p = 2 e q primo ímpar, então se consideram $a = \frac{q-1}{2}$ e b = 1.

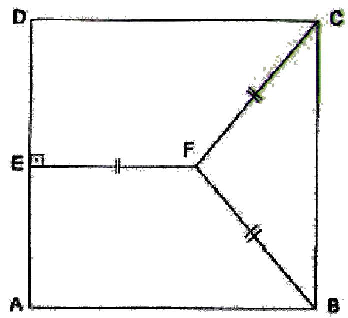
# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
# DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2009

10 de outubro de 2009.

***Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)***

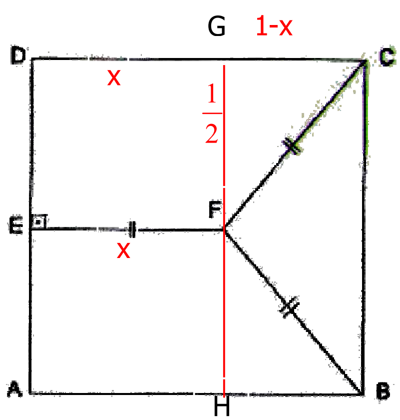
**QUESTÃO 8**

Sr. Manuel comprou um terreno e pretende dividi-lo em três partes, como mostra a figura abaixo, para plantar rosas, orquídeas e margaridas.




O terreno que ele comprou, ABCD, tem a forma de um quadrado de lado 1 e sabendo que as medidas dos lados EF, FC e FB são congruentes e que o lado DE mede $\frac{1}{2}$.

Qual a área do triângulo BCF, destinada a plantação de orquídeas?




Traçamos o segmento de reta GH passando por F.

Seja DG igual a x, teremos GC (1 - x) e GF = $\frac{1}{2}$.

GFC é um triângulo retângulo em G, logo por Pitágoras temos:

$$x^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{4}$$

$$2x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{8}$$

Dessa forma o triângulo BCF terá base 1 e altura (1 - x)

$$s_\Delta = \frac{h \cdot b}{2}$$

$$s_\Delta = \frac{\frac{3}{8} \cdot 1}{2}$$

$$s_\Delta = \frac{3}{16} ua$$