OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

PARTE OBJETIVA (10 pontos por questão)

QUESTÃO 1

Quantas vezes entre 00:00 e 12:00, o número da hora divide o número do minuto?

Solução

00:00 as 00:59 – 0

01:00 as 01:59 – 60 (todos são divisíveis por 1!)

02:00 as 02:59 – 30 (múltiplos de 2, + 0/2)

03:00 as 03:59 – 20 (múltiplos de 3, + 0/3)

04:00 as 04:59 – 15 (múltiplos de 4, + 0/4)

05:00 as 05:59 – 12 (múltiplos de 5, + 0/5)

06:00 as 06:59 – 10 (múltiplos de 6, + 0/6)

07:00 as 07:59 – 9 (múltiplos de 7, + 0/7)

08:00 as 08:59 – 8 (múltiplos de 8, + 0/8)

09:00 as 09:59 – 7 (múltiplos de 9, + 0/9)

10:00 as 10:59 – 6 (múltiplos de 10, + 0/10)

11:00 as 12:00 – 7 (múltiplos de 11, + 0/11, + 0/12)

Total: 60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 7

= 184

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

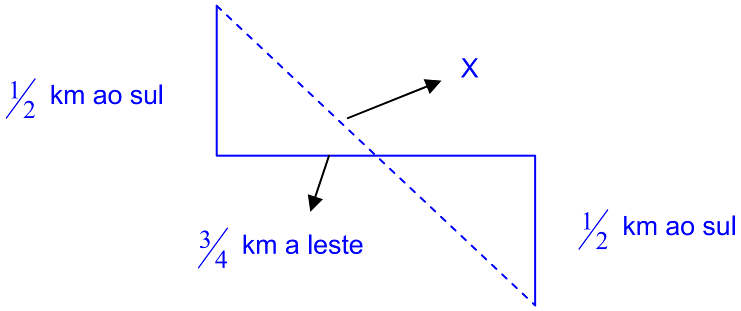
18 de outubro de 2008.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 2

Beto caminha $\frac{1}{2}$ km para o sul, em seguida $\frac{3}{4}$ de km para leste e finalmente $\frac{1}{2}$ km ao sul. Quantos quilômetros ele teria feito se fosse em linha reta?

Solução



Fazendo a projeção da linha horizontal e das linhas verticais formamos um retângulo. Calculando por Teorema de Pitágoras a diagonal do retângulo temos:

$$x^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x^2 = 1 + \frac{9}{16}$$

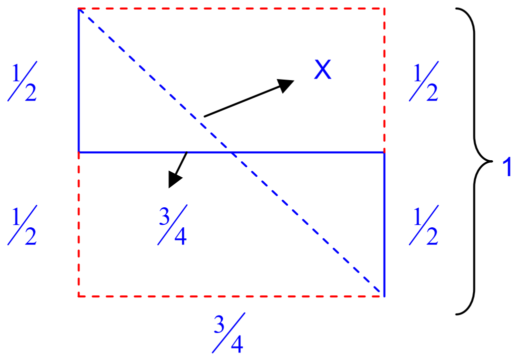
determinando o MMC, temos:

$$x^2 = \frac{16+9}{16}$$

$$x^2 = \frac{25}{16}$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ ou } 1\frac{1}{4} \text{ ou } 1{,}25\text{Km ou } 1250\text{m}$$



OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 3

Qual o maior valor de n para o qual há exatamente $n/9$ múltiplos de 8 no conjunto {1, 2, ..., n}?

Solução

{1,2,3,4,5,6,7,**8**,9} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{10,11,12,13,14,15,**16**,17,18} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{19,20,21,22,23,**24**,25,26,27} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{28,29,30,31,**32**,33,34,35,36} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{37,38,39,**40**,41,42,43,44,45} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{46,47,**48**,49,50,51,52,53,54} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{55,**56**,57,58,59,60,61,62,63} = 1 múltiplo de 8 → 1/9 (serve)
{**64**,65,66,67,68,69,70,71,**72**} = 2 múltiplos de 8 → 2/9 (não serve)

7 múltiplos de 8.

Com n = 63, temos 7 múltiplos de 8, que seria $\frac{63}{9} = 7$

QUESTÃO 4

Sendo $\begin{cases} a + b + c = 11 \\ ab + ac + bc = 36 \end{cases}$, determine $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Solução

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

$$(11)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (36)$$

$$121 = a^2 + b^2 + c^2 + 72$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 121 - 72$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 49$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{49}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$$

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

***PARTE DISCURSIVA** (20 pontos por questão)*

QUESTÃO 5

Considere a organização numérica feita na forma triangular a seguir.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 2 & & & & & \\
 & & & & 4 & & 6 & & & & \\
 & & & 8 & & 10 & & 12 & & & \\
 & & 14 & & 16 & & 18 & & 20 & & \\
 & 22 & & 24 & & 26 & & 28 & & 30 & \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array}
$$

Sendo **a** o primeiro número da 30ª linha e **b** o último número da 31ª linha, determine o valor de $b^2 - a^2$.

Solução

Percebe-se que:

Último número de cada linha = nº da linha x (nº da linha +1)

Primeiro número de cada linha = nº da linha x (nº da linha -1) + 2

Assim:

a o primeiro número da 30ª linha

$a = 30 \times (30 - 1) + 2$

$a = 30 \times 29 + 2$

$a = 872$

$a^2 = 760\ 384$

b o último número da 31ª linha

$b = 31 \times (31 + 1)$

$b = 31 \times 32$

$b = 992$

$b^2 = 984\ 064$

$b^2 - a^2 = 984\ 064 - 760\ 384$

$b^2 - a^2 = 223\ 680$

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 6

Sendo ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, inteiros positivos tal que:

$$3 \times 2^a + 5^b + 7^c + 11^d = 2008$$

Qual o valor de a + b + c + d?

Solução

Analisemos as potências separadamente:

- 2 elevado a qualquer inteiro positivo multiplicado por 3, apresenta como solução um número par;

- 5 elevado a qualquer inteiro positivo apresenta como potência um número ímpar;

- 7 elevado a qualquer inteiro positivo apresenta como potência um número ímpar;

- 11 elevado a qualquer inteiro positivo apresenta como potência um número ímpar.

Logo: **par + ímpar + ímpar + ímpar = ímpar**

Portanto, não há solução nos inteiros positivos que satisfaça a igualdade, visto que 2008 é um número par.

Obs.: No entanto, a banca atribuirá 15 pontos aos alunos que não atentaram a condição: inteiros positivos e encontraram, a partir da analise da paridade e das possibilidades para as potências, os valores a = 0, b = 4, c = 2 e d = 3, encontrando a + b + c + d = 9.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

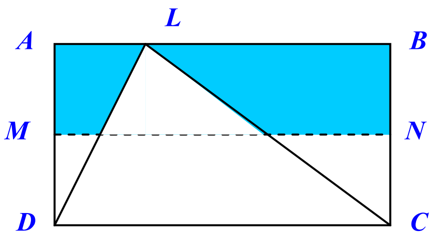
Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 7

Sendo ABCD um retângulo onde a medida de AB equivale ao dobro da medida de BC e L é um ponto qualquer sobre o segmento AB. Tem-se ainda que M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC respectivamente. Se o perímetro de ABCD mede 144 cm, determine a área do quadrilátero ABNM que não pertence ao triângulo ΔLCD.

Solução

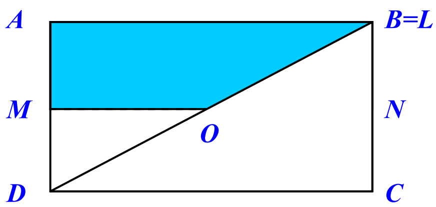
Para facilitar a visualização, primeiro vamos construir a figura:



(a) Levando em consideração que $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{DC}} = 2\overline{\mathbf{BC}} = 2\overline{\mathbf{AD}}$*, podemos afirmar que* $\overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{DC}} + \overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{AD}} = 144$*, ou que* $2\overline{\mathbf{BC}} + 2\overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{BC}} = 144$*, logo,* $6\overline{\mathbf{BC}} = 144$*, assim como* $\overline{\mathbf{BC}} = 24\mathbf{cm}$*. Dessa conclusão podemos depreender ainda que:*

- *i.* $\overline{\mathbf{AD}} = 24\mathbf{cm}$*, pois são lados iguais;*
- *ii.* $\overline{\mathbf{BM}} = \overline{\mathbf{AM}} = \overline{\mathbf{DM}} = \overline{\mathbf{CN}} = 12\mathbf{cm}$*, pois M e N são pontos médios (que dividem o lado ao meio);*
- *iii.* $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{DC}} = 48\mathbf{cm}$*, pois equivalem ao dobro do lado encontrado.*

(b) Independente da posição de L sobre o lado do retângulo ABCD, sempre a área do ΔLCD será a mesma, pois ela está relacionada com a base e a altura que não se modificam com a alteração de L. Assim, se L coincidisse com o ponto B teríamos a seguinte figura:



Note que o ponto "O" representa o ponto médio de BD e também o ponto médio de MN.

(c) Assim, a área desejada (hachurada) correspondente quadrilátero ABOM será obtida pela ***diferença*** *entre as áreas dos triângulos ΔABD e ΔMOD.*

(d) A área do ΔABD é igual a área do ΔLCD, ou seja, a base do triângulo corresponderá ao lado maior dos retângulos e a altura equivalerá ao lado menor. Assim teremos a área do ΔLCD definida por:

$$\frac{\mathbf{base} \times \mathbf{altura}}{2} = \frac{48\text{x}24}{2} = 576\mathbf{cm}^2 .$$

(f) A área do ΔMOD será definida pela altura que é metade do lado menor e a base que é a metade do lado maior. Assim teremos a área do ΔMOD definida por:

$$\frac{\mathbf{base} \times \mathbf{altura}}{2} = \frac{24\text{x}12}{2} = 144\mathbf{cm}^2$$

Logo a área desejada (hachurada) equivale a $576 - 144 = 432\mathbf{cm}^2$

Questão retirada da Olimpíada Nacional do Uruguai de 1996.

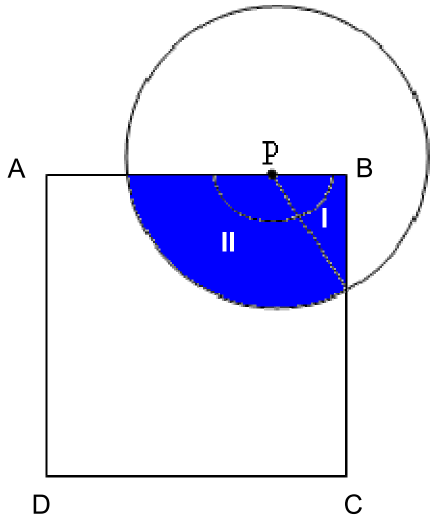
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 8

Sejam ABCD um quadrado de lado 4 e P um ponto do lado AB tal que $\dfrac{PA}{PB} = 3$. Determine a área comum ao quadrado e ao círculo de centro P e raio 2.



Solução

Calculando a área do Setor Circular II, com raio = 2

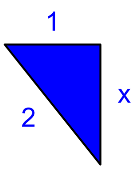
$$\begin{array}{ccc} 360^o & \rightarrow & 2^2\pi \\ 120^o & \rightarrow & x \end{array}$$

Efetuando a proporcionalidade, temos:

$$3 : \quad \begin{array}{ccc} 360^o & \rightarrow & 4\pi \\ 120^o & \rightarrow & x \end{array} \quad : 3$$

Logo, $120^o = \dfrac{4\pi}{3}$ rad.

Calculando a altura do triângulo retângulo I, temos:



$$2^2 = 1^2 + x^2$$
$$4 = 1 + x^2$$
$$4 - 1 = x^2$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}$$

Determinando a área do triângulo I, obtemos:

$$A = \frac{1 \bullet \sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Adicionando as áreas I e II, obtemos

$$A = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$