OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

***PARTE OBJETIVA** (10 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

Na sala de Bruno Boneco a quantidade de meninas supera a de meninos em 25%. A professora perguntou quem gostava de educação física e obteve as seguintes respostas:

i) 28 alunos disseram que gostavam;
ii) Somente 5 meninos disseram que não gostavam;

Sabendo que existem 54 alunos na turma, quantas meninas gostam de educação física?

Solução

Tendo 54 alunos na turma e sabendo que têm 25% a mais de meninas podemos calcular quantas meninas (x) e quantos meninos (y) existem. Existem muitas formas de fazer essa conta, por exemplo:

$$x + y = 54$$
$$x = y + 25\%y = y + \frac{25}{100}y = y + \frac{1}{4}y = y + \frac{y}{4} = \frac{4y}{4} + \frac{y}{4} = \frac{5y}{4}$$
$$\therefore \frac{5y}{4} + y = 54 \rightarrow \frac{5y}{4} + \frac{4y}{4} = 54 \rightarrow \frac{9y}{4} = 54 \rightarrow y = \frac{54 \times 4}{9} = 24$$
$$\therefore x = \frac{5y}{4} = \frac{5 \times 24}{4} = 30$$

Logo são 24 meninos (x) e 30 meninas (y). Sabemos também que 28 alunos gostam de educação física (g) o que nos facilita saber quantos não gostam dessa aula (n).

$$g + n = 54 \rightarrow 28 + n = 54 \rightarrow n = 54 - 28 \therefore n = 26$$

Sabendo isso podemos colocar os dados em uma tabela que facilitará a visão da solução do problema. Dessa forma podemos calcular as informações faltantes pela diferença dos valores.

	Meninos	Meninas	**Totais**
Gostam			**28**
Não Gostam	**5**		**26**
Totais	**24**	**30**	**54**

Assim podemos saber que:

a) Meninos que gostam da aula pesquisada: 24 – 5 = 19

b) Meninas que não gostam da aula pesquisada: 26 – 5 = 21

c) Meninas que gostam da aula pesquisada: 30 – 21 = 9 ou 28 – 19 = 9

Assim, apenas 9 meninas responderam que gostam da aula de educação física.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

<u>Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)</u>

QUESTÃO 2

Para comemorar seu retorno a sua cidade natal, Fábio das Medalhas resolveu promover uma festa em sua mansão em Nazaré das Farinhas. Por ser tímido e avesso as novas tecnologias, ele convidou todos através de cartas. O resultado disso é que, contando com ele, estavam presentes 6 homens e algumas mulheres. Sabe-se ainda que:

I. Há duas mulheres que conhecem exatamente 4 homens cada;
II. Há 3 mulheres que conhecem exatamente 3 homens cada;
III. As outras mulheres conhecem exatamente 2 homens cada;
IV. Nenhum homem conhece mais de 4 mulheres.

Qual o número máximo de mulheres presentes na festa de Fabinho?

Solução

Como existem 6 homens (já incluindo o Fábio das Medalhas) e cada um só pode conhecer 4 mulheres, existe no máximo um total de $6 \times 4 = 24$ combinações possíveis.

O limite de mulheres conhecidas pelos homens (no máximo 4) é fundamental para estudar o limite total de mulheres. Observando esse limite, podemos concluir das outras afirmações que:

I. Há duas mulheres que conhecem exatamente 4 homens cada;

$4 + 4 = 8$ *combinações.*

II. Há 3 mulheres que conhecem exatamente 3 homens cada;

$3 + 3 + 3 = 9$ *combinações.*

III. As outras mulheres conhecem exatamente 2 homens cada;

Da combinação total de mulheres conhecidas (24) teremos que 17 já são reservadas aos quesitos anteriores (8 + 9), restando Apenas 7 combinações (24 – 17).

Como as outras mulheres só conhecem exatamente 2 homens cada, a quantidade não poderá ser superior a 6 (2 + 2 + 2) que é o maior múltiplo de 2 (para obter o maior número de mulheres na festa) menor que 7 que a quantidade que ainda resta.

Em resumo teremos que:

a) Pela afirmação I teremos 2 mulheres que consomem 8 combinações;

b) Pela afirmação II teremos 3 mulheres que consomem 9 combinações;

c) Pela afirmação III teremos 3 mulheres que consomem 6 combinações.

Ao todo teremos 2 + 3 + 3 = 8 mulheres presentes que representam 8 + 9 + 6 = 23 combinações.

<u>Podemos afirmar que estiveram presentes no máximo 8 mulheres na festa.</u>

Para facilitar a visualização verifique a tabela abaixo de uma combinação possível:

		Homens						
		H1	H2	H3	H4	H5	H6	
Mulheres	M1	1	1	1	1			
	M2	1	1	1	1			
	M3	1	1	1				
	M4	1	1	1				
	M5				1	1	1	
	M6				1	1		
	M7					1	1	
	M8					1	1	
		4	4	4	4	4	3	23

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

<u>Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)</u>

QUESTÃO 3

A professora *Estelita Chapéu de Onça* passou como trabalho de casa a seguinte expressão:

$$\frac{1}{37}+\frac{\left\{\left[\left(\sqrt{1,22}\right)^{3/7}\right]^{0}\right\}^{-5,4}-1}{7^{26}+7^{25}+7^{24}+7^{23}+7^{22}}\times\frac{3}{5^{576}}=$$

Bruno Boneco usou a calculadora do pai, mas, distraído, ao fazer as contas <u>somou o numeral que já estava na máquina</u> às contas que tinha que fazer obtendo o resultado que está no visor (0,054054054...). Quando apresentou o resultado, a professora lhe informou que estava errado apesar dele ter feito todas as operações corretamente.

Qual numeral estava na calculadora antes de Bruno realizar as operações da expressão?

Solução

Embora a expressão possa aparentemente parecer complexa, quem domina as propriedades das operações envolvidas terá certa facilidade como veremos.

(a) Todo numeral elevado à zero resulta em **1.**

(b) 1 elevado a qualquer numeral resulta em 1.

(c) 1 – 1 = **0** (Zero)

$$\frac{1}{37}+\frac{\left\{\left[\left(\sqrt{1,22}\right)^{3/7}\right]^{0}\right\}^{-5,4}-1}{\underbrace{7^{26}+7^{25}+7^{24}+7^{23}+7^{22}}}\times\frac{3}{\underbrace{5^{576}}}=$$

(e) o produto de Zero por qualquer numeral também é **0** (zero).

(d) Zero dividido por qualquer numeral não nulo resulta também em **Zero.**

Assim, a expressão resulta esse sendo o resultado devido.

$$\frac{1}{37}+0=\frac{1}{37}=0,\overline{027}$$

Como o resultado obtido foi $0,\overline{054}=\frac{54}{999}=\frac{2}{37}$ *e esse numeral é o resultado da soma do numeral original com o resultado devido, basta obter a diferença entre as frações* $\frac{2}{37}-\frac{1}{37}=\frac{1}{37}=0,\overline{027}$ *.*

<u>Nesse caso, podemos afirmar que o numeral que estava na calculadora era a dízima periódica simples 0,(027).</u>

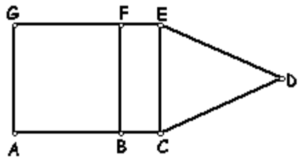
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 4

A figura ao lado pode ser decomposta em 3 outras figuras geométricas: um quadrado, um retângulo e um triângulo. Sabe-se ainda que:



i) CD = DE;
ii) O perímetro de BCDEF é 6m maior que o perímetro do triângulo CDE;
iii) O perímetro do retângulo ACEG é 38m.
iv) O perímetro do terreno todo é 50m.

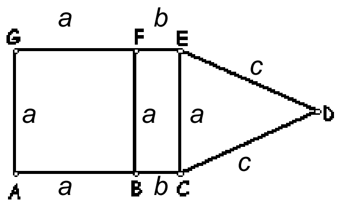
Quanto mede o maior lado de BCDEF?

Solução

Sabendo que ABGF é um quadrado e que BCEF um retângulo conforme o enunciado, vamos facilitar nomeando cada lado da figura, como segue:

$\overline{AB} = a; \overline{BC} = b; \overline{CD} = c; \overline{DE} = \overline{CD} = c; \overline{EC} = \overline{FB} = \overline{AG} = \overline{AB} = \overline{FG} = a; \overline{EF} = \overline{BC} = b;$

Assim temos a seguinte figura:



- *Pela segunda afirmativa temos:*

$b + c + c + b + a = c + c + a + 6 \therefore b + b = 6 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3m$

- *Pela terceira afirmativa temos:*

$a + b + a + a + b + a = 38 \rightarrow 4a + 2b = 38 \rightarrow 4a + 6 = 38 \rightarrow 4a = 32 \therefore a = 32 \div 4 = 8m$

- *Pela quarta afirmativa temos:*

$a + b + c + c + b + a + a = 50m \therefore 3a + 2b + 2c = 50 \rightarrow 24 + 6 + 2c = 50 \rightarrow 2c = 20 \rightarrow c = 10m$ ***Assim, o maior lado da figura BCDEF são os lados*** $\overline{CD} = \overline{DE} = 10m$ **.**

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

PARTE DISCURSIVA ***(20 pontos por questão)***

QUESTÃO 5

$\Delta + \Delta + \Delta = \infty$
$\infty + \lozenge =$ ♫
♥ + ♥ + ♥ = $\lozenge$

Bruno Boneco estava brincando com os amigos e inventaram o enigma matemático ao lado. Nele, os cinco sinais que não são operadores matemáticos representam algarismos distintos. O sinal ♫ vale quanto?

Solução

- *só podem representar um único algarismo diferente deles. Analisando as possibilidades para os valores possíveis "Δ + Δ+ Δ" e "♥ + ♥ + ♥" temos:*

(a) 0 + 0 + 0 = 0, não serve, pois a soma tem que ser diferente das parcelas;

(b) 1 + 1 + 1 = 3 serve, pois a soma é diferente das parcelas;

(c) 2 + 2 + 2 = 6 serve, pois a soma é diferente das parcelas;

(d) 3 + 3 + 3 = 9 serve, pois a soma é diferente das parcelas;

(e) 4 + 4 + 4 = 12 não serve, pois a soma possui mais que um algarismo, assim como mais nenhum outro algarismo superior à 4 servirá pelo mesmo motivo.

- *Agora devemos analisar as opções acima (1, 2 e 3) considerando que, pela expressão ∞ + ◊ = ♫*, a soma de duas delas deve resultar em um (e apenas um) outro algarismo.

Logo:

(i) Opção (a) + opção (b) = 3 + 6 = 9 serve, pois atende as condições do problema;

(ii) Opção (b) + opção (c) = 3 + 6 = 12, não serve, pois a soma possui mais que dois algarismos;

(iii) Opção (b) + opção (d) = 6 + 9 = 15, não serve, pois a soma possui mais que dois algarismos.

Assim, o símbolo ♫ somente poderá ser representado pelo algarismo 9.

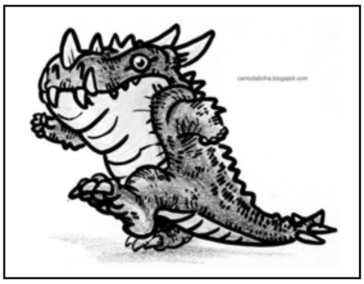
(Essa questão foi retirada da prova de 2008 da Olimpíada Internacional Canguru sem Fronteiras versão espanhola http://es.geocities.com/canguromat/canguro2008/ikg2008.html).

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

<u>Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)</u>

QUESTÃO 6



A mãe de Bruno Boneco é a paleontóloga Ângela Poo Eira Boneco que está pesquisando há 5 décadas sobre uma velha lenda nordestina, o monstro imortal *"K. Bradapeste"*, que vive dormindo numa caverna bem escondida na pequena cidade de Tribobó do Norte.

Versa a lenda que quando o monstro *K. Bradapeste* tem fome, ele desperta e come uma quantidade de cabras equivalente à soma dos dígitos do ano em que ele está. Em seguida, ele dorme tantos anos quantas cabras foram comidas.

Escritos antigos informam que o monstro estava comendo no dia 18 de outubro de 354 d. C.. Há possibilidades de K. Bradapeste despertar no ano de 2008?

Solução

Sabemos que o monstro despertou em 354 d.C. o que nos permite deduzir que ele comeu 3 + 5 + 4 = 12 cabras e ficou adormecido 12 anos, tornando a despertar no ano de 354 + 12 = 366 d.C.

Novamente repetindo o raciocínio verificamos que ele comeu 3 + 6 + 6 = 15 cabras e dormiu mais 15 anos tornando a despertar em 366 + 15 = 381 d.C. Repetindo a operação verificamos que sempre ele come e dorme uma quantidade de cabras e anos equivalente a um numeral múltiplo de 3 (diz-se $M_{(3)}$).

Sabemos através da teoria dos números que um numeral é múltiplo de 3 quando a soma dos seus algarismos for também um $M_{(3)}$. Também não é difícil verificar que $M_{(3)} + M_{(3)} = M_{(3)}$.

Tal fenômeno ocorre porque um numeral $M_{(3)}$ contém o numeral 3 entre seus fatores primos na sua forma decomposta e a soma de dois numerais com essa condição também apresenta essa característica. Por exemplo:

- *6 = 2 x 3 = 2 + 2 + 2 (o numeral 2 somado 3 vezes) ou 3 + 3 (o numeral 3 somado 2 vezes)*
- *15 = 3 x 5 = 5 + 5 + 5 (o numeral 5 somado 3 vezes) ou 3 + 3 + 3 + 3 + 3 (o numeral 3 somado 3 vezes)*

Logo, 6 + 15 = 21, ou seja, (3 + 3) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = ***<u>3 x 7 = 21(c.q.d.)</u>***

Portanto, o monstro ***K. Bradapeste*** *despertará sempre em anos que sejam $M_{(3)}$, todavia 2008 não é um $M_{(3)}$ (pois 2008 = 2 + 0 + 0 + 8 = 10), ou seja,* ***<u>não há possibilidade do monstro K. Bradapeste despertar em 2008.</u>***

QUESTÃO 7

A aritmética modular (ou do relógio) é muito importante no estudo da teoria elementar dos números e foi apresentada por Gauss no século XIX. Diz-se que, se dois numerais inteiros, quando divididos por um terceiro, apresentam o mesmo resto, são congruentes em determinado módulo.

Assim, 20 é côngruo (ou congruente) a 14 em módulo 6, pois ambos (20 e 14) possuem o mesmo resto quando divididos por 6. Nesse caso, podemos representar a relação de congruência como:

$20 \equiv 14$ (*mod. 6)*, onde se lê que **20 é congruente a 14, módulo 6**.

Agora que você sabe aritmética modular, pode responder as questões abaixo:

a) Para concorrer com a famosa série de televisão chamada 24 horas, o aluno Bruno Boneco teve a idéia de lançar uma série chamada 37 horas na TV de sua cidade (Bonecópolis). A série conta a história de um agente secreto (Boneco Bond) que tem 37 horas para elucidar um crime. Os episódios sempre começam às 7 horas da manhã quando ele acorda. Qual o horário limite para ele solucionar o caso?

Solução

Inicialmente verificamos que o episódio inicia às 7 horas da manhã e se encerra 37 horas depois.

Como $37 > 24 = 1$ dia, temos uma operação de aritmética modular, ou seja, existe um limite de 24 horas que representam um dia o que significa que o episódio se passa em mais de um dia.

Nesse caso, $37 \div 24 = 1$, resto 13, ou seja, o episódio se inicia no dia "d" as 7 horas da manhã, e termina no dia "d+1", 13 horas depois das 7 horas. Como $13 + 7 = 20 < 24$, ***o episódio deve terminar em no dia seguinte ao iniciado (d+1), às 20 horas.***

Outra forma de escrever essa solução seria a seguinte:

$37 \equiv 13$ (mód. 24) (leia-se que 37 é congruente a 13 no módulo 24). Assim o episódio terminaria na mesma hora que começara (7 horas) se $37 \equiv 0$ (Mód. 24).

Como o resultado foi diverso, ($37 \equiv 13$ (mód. 24)), basta somar a hora que começaria (7) com a congruência obtida (13) para saber que horas termina, ou seja, $7 + 13 = 20$ horas.

b) Hoje, sábado, o primeiro episódio da série foi ao ar e, por falta de verba, o segundo episódio somente irá ao ar no dia 15 de julho de 2010. Em qual dia da semana o segundo episódio de "Boneco Bond 37 horas" irá ao ar?

Solução

Hoje (dia da prova de você não percebeu!) é sábado, dia 18/10/2008 e os dias da semana variam de 7 em 7, logo, existe um limite de 7 dias o que nos confere uma outra operação de aritmética modular.

Primeiramente devemos verificar quantos dias correram entre o dia de hoje e a data do próximo episódio.

- *18/10/2008 a 31/12/2008 = 74 dias*
- *01/01/2009 a 31/12/2009 = 365 dias*
- *01/01/2010 a 15/07/2010 = 196 dias*
- *Total = 74 + 365 + 196 = 635 dias*

Assim, sabemos que 635 ÷ 7 = 90, resto 5, ou seja, 90 semanas e 5 dias depois do episódio atual. ***Como sabemos que hoje é sábado, 5 dias depois representa que o próximo episódio ocorrerá numa quinta-feira.***

Outra forma de escrever essa solução seria a seguinte:

635 ≡ 5 (mód. 7) (leia-se que 635 é congruente a 5 no módulo 7). Assim o segundo episódio seria exibido no mesmo dia da semana que o primeiro (sábado) se 635 ≡ 0 (Mód. 7).

Como o resultado foi diverso, 635 ≡ 5 (mód. 7), basta contar 5 dias depois de sábado para saber o sai da semana desejado, ou seja, domingo =1, segunda = 2, terça = 3, quarta = 4, ***quinta = 5****.*

Congruência e aritmética modular é um assunto muito importante em matemática e uma ferramenta muito útil na solução de problemas de matemática. Por isso, recomenda-se verificar o material de congruência disponível no sítio da OBM apresentado nas semanas olímpicas V e VII respectivamente (Prof. Carlos Shine e Prof. Yuri Lima) http://www.obm.org.br/frameset-semana.htm e o artigo sobre divisibilidade e congruência do Prof. Carlos Augusto Moreira publicado na revista eureka 2 http://www.obm.org.br/frameset-eureka.htm.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2008

18 de outubro de 2008.

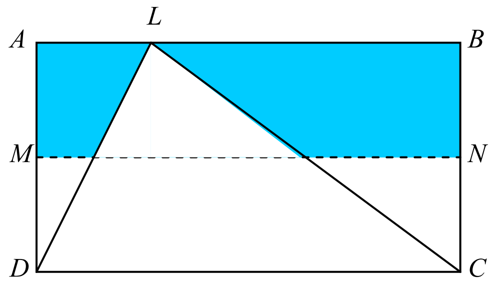
Nível 1 – (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 8

ABCD é um retângulo onde a medida de AB equivale ao dobro da medida de BC e L é um ponto qualquer sobre o segmento AB. Tem-se ainda que M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC respectivamente. Se o perímetro de ABCD mede 144 cm, achar a área do quadrilátero ABNM que não pertence ao triângulo ΔLCD.

Solução

Para facilitar a visualização, primeiro vamos construir a figura:



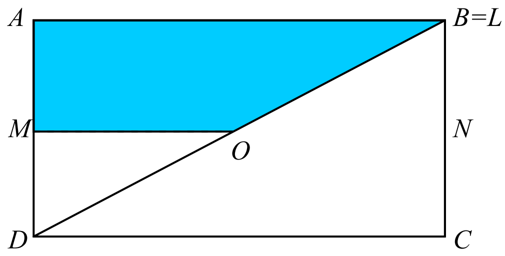
(a) Levando em consideração que $\overline{AB} = \overline{DC} = 2\overline{BC} = 2\overline{AD}$*, podemos afirmar que* $\overline{AB} + \overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AD} = 144$*, ou que* $2\overline{BC} + 2\overline{BC} + \overline{BC} + \overline{BC} = 144$*, logo,* $6\overline{BC} = 144$*, assim como* $\overline{BC} = 24cm$*. Dessa conclusão podemos depreender ainda que:*

i. $\overline{AD} = 24cm$*, pois são lados iguais;*

ii. $\overline{BM} = \overline{AM} = \overline{DM} = \overline{CN} = 12cm$*, pois M e N são pontos médios (que dividem o lado ao meio);*

iii. $\overline{AB} = \overline{DC} = 48cm$*, pois equivalem ao dobro do lado encontrado.*

(b) Independente da posição de L sobre o lado do retângulo ABCD, sempre a área do ΔLCD será a mesma, pois ela está relacionada com a base e a altura que não se modificam com a alteração de L. Assim, se L coincidisse com o ponto B teríamos a seguinte figura:



Note que o ponto "O" representa o ponto médio de BD e também o ponto médio de MN.

(c) Assim, a área desejada (hachurada) correspondente quadrilátero ABOM será obtida pela ***diferença*** *entre as áreas dos triângulos ΔABD e ΔMOD.*

(d) A área do ΔABD é igual a área do ΔLCD, ou seja, a base do triângulo corresponderá ao lado maior dos retângulos e a altura equivalerá ao lado menor. Assim teremos a área do ΔLCD definida por:

$$\frac{base \times altura}{2} = \frac{48x24}{2} = 576cm^2 .$$

(f) A área do ΔMOD será definida pela altura que é metade do lado menor e a base que é a metade do lado maior. Assim teremos a área do ΔMOD definida por:

$$\frac{base \times altura}{2} = \frac{24x12}{2} = 144cm^2$$

Logo a área desejada (hachurada) equivale a $576 - 144 = 432cm^2$

Questão retirada da Olimpíada Nacional do Uruguai de 1996.