OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)

***PROVA DISCURSIVA** (20 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

Seja A um conjunto de 2007 números inteiros positivos consecutivos, cujo menor elemento é ***a***. Determine o menor valor de ***a*** para o qual a soma dos elementos de A é um quadrado perfeito par.

SOLUÇÃO:

Temos $A = \{a, a+1, a+2, ... a+2006\}$.

A soma dos elementos de A é $S = \dfrac{(a + a + 2006) \cdot 2007}{2} = (a + 1003) \cdot 2007$.

Como $2007 = 3^2 \cdot 223$, devemos ter $(a+1003) \cdot 223$ quadrado perfeito par.

Logo, precisamos ter $a + 1003 = (2k)^2 \cdot 223$, com *k* natural.

Como $a = (2k)^2 \cdot 223 - 1003$, o menor valor de *k* que faz *a* ser positivo é *k* = 2, o que dá *a* = 2565.

QUESTÃO 2

Sejam *A*, *B*, *C* e *D* pontos no espaço tais que os ângulos $B\hat{A}D, B\hat{C}D, A\hat{D}C, A\hat{B}C$ são retos. Prove que *A*, *B*, *C* e *D* são coplanares.

SOLUÇÃO:

Usando o teorema de Pitágoras, temos que $\begin{cases} BD^2 = BC^2 + CD^2 \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \\ AC^2 = AD^2 + CD^2 \end{cases}$.

Daí segue que $2AC^2 = 2BD^2 \Rightarrow AC = BD$. Substituindo, segue que $AD = BC$.

Com isso, temos que os triângulos *ACD*, *BCD*, *ABD* e *ABC* são congruentes.

Sendo $\theta = C\hat{A}D$, pela congruência, temos que $B\hat{A}C = 90^\circ - \theta$.

Daí, segue que $B\hat{A}C + C\hat{A}D = 90^\circ = B\hat{A}D$, portanto, *A*, *B*, *C* e *D* são coplanares.

QUESTÃO 3

Considere os $\boldsymbol{n}$ vértices de um polígono regular sobre uma circunferência. Escolhendo-se 3 vértices A, B e C (distintos) deste polígono aleatoriamente, a probabilidade de o triângulo ABC ser obtusângulo é P. Determine os valores de $\boldsymbol{n}$ para os quais P = $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

Seja ABC uma possível escolha de um triângulo (de modo que A,B,C esteja no sentido horário). Fixe de uma vez por todas o vértice A do triângulo.

Sejam *a*, *b*, *c* o número de vértices do polígono que estão entre A e B, B e C, C e A respectivamente.

Então:

(I) $a+b+c=n-3$ e $a,b,c \geq 0$

Agora separamos e dois casos:

1º caso: *n* par

Seja $n=2k$. Então, para que possua um ângulo obtuso, *a*, *b* ou *c* deve ser maior ou igual que k.

Agora basta contar quantas soluções possui a equação (I) e quantas destas satisfazem a condição acima.

O número de soluções de (I) é sabido e igual a $\binom{n-1}{2}$.

Agora, para termos a condição que $a \geq k$ escrevemos $a = k + a'$ e agora temos que calcular o numero de soluções de $a+b+c=k-3$ que é $\binom{k-1}{2}$.

Podíamos ter escolhido *b* ou *c*, logo devemos multiplicar por 3. (Veja, também, que não é possível duas variáveis serem maiores ou iguais a *k*).

Daí $P = \dfrac{3\binom{k-1}{2}}{\binom{n-1}{2}} = \dfrac{3(k-1)(k-2)}{(2k-1)(2k-2)} = \dfrac{3(k-2)}{2(2k-1)}$ para q seja igual a $\frac{1}{2}$ precisamos $k=5$ logo $n=10$.

2º caso: *n* ímpar

Seja $n=2k+1$ pelos mesmos argumentos anteriores temos que a probabilidade é:

$P = \dfrac{3\binom{k}{2}}{\binom{n-1}{2}} = \dfrac{3k(k-1)}{2k(2k-1)} = \dfrac{3(k-1)}{2(2k-1)}$ para que seja igual a $\dfrac{1}{2}$ precisamos ter $k = 2$, logo $n = 5$.

QUESTÃO 4

Considere uma elipse ε de focos F e F' e um ponto M sobre ε. Determine o lugar geométrico do centro do círculo ex-inscrito no triângulo MFF' em relação ao lado MF quando M varia sobre ε.

SOLUÇÃO:

Sejam 2*a* e 2*c* o eixo maior e a distância focal da elipse, respectivamente. Seja AA' o eixo maior da elipse (AF < AF').

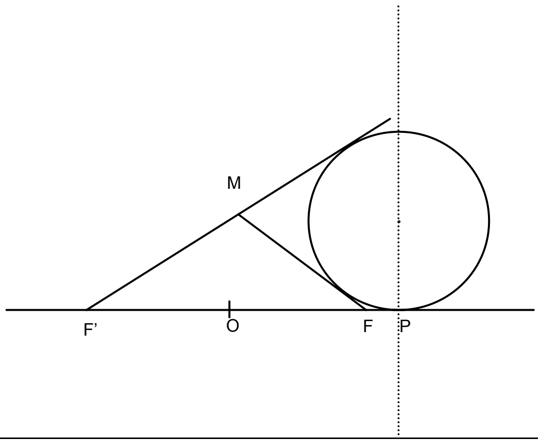
Como $MF + MF' = 2a$, temos que o perímetro do triângulo MFF' é 2*a* + 2*c*.

É sabido que a distância F'P é igual ao semi-perímetro do triângulo MFF', portanto, $F'P = a + c$.

Sendo O o centro da elipse, segue que $OP = a$. Portanto, temos P = A.

Então, podemos afirmar que o centro da circunferência está na perpendicular ao eixo maior da elipse passando por A.

Reciprocamente, é fácil ver que qualquer ponto desta reta, exceto A, está no lugar geométrico pedido (o ponto A deve ser excluído, pois não existe triângulo quando M está na reta FF').



QUESTÃO 5

Determine todos os inteiros positivos *a*, *b*, *c* tais que $(ab + bc + ca - 1)^2 \geq (a^2 + 1) . (b^2 + 1) . (c^2 + 1)$.

SOLUÇÃO:

$(ab+bc+ca-1)^2 \geq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ vale se e somente se

$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2abc^2+2acb^2+2cba^2-2ab-2bc-2ac+1 \geq$

$a^2b^2c^2+(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+a^2+b^2+c^2+1 \quad \Leftrightarrow$

$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+1-(2abc^2+2acb^2+2cba^2-2ab-2bc-2ac+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$

$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2-2abc(a+b+c)+2ab+2bc+2ac \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (abc-a-b-c)^2 \leq 0$

o que acontece se e somente se $abc-a-b-c=0$, logo: $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}=1$.

Agora, como *a,b,c* são inteiros, temos que ou todas as frações são iguais a $\frac{1}{3}$ ou uma delas é $\frac{1}{2}$ (pois se nenhuma é $\frac{1}{2}$, a soma é $\leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, com igualdade se e somente se todas são $\frac{1}{3}$).

Mas, se todas forem $\frac{1}{3}$, então, $ab = bc = ac = 3$ o que obviamente não tem solução inteira. Logo podemos supor sem perda de generalidade que $ab = 2$ portanto, ainda sem perda, podemos supor $a = 1, b = 2$ o que implica $\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow \frac{3}{2c}=\frac{1}{2}$ logo $c = 3$.

Portanto, as soluções são $(1,2,3)$ e suas permutações.

QUESTÃO 6

6) Para cada *n* natural, defina S (*n*) = soma dos dígitos de *n* (na base 10).

a) Existe $M > 0$ constante tal que $\frac{S(n)}{S(3n)} < M$, para todo *n* natural?

SOLUÇÃO:

Considere o número $\mathrm{n} = \underbrace{33...3}_{\text{m dígitos}}\,4$. Temos que $3\mathrm{n} = 1\underbrace{00...0}_{\text{m dígitos}}\,2$.

Logo, $\frac{\mathrm{S(n)}}{\mathrm{S(3n)}} = \frac{3\mathrm{m}+4}{3}$, que é ilimitado.

Com efeito, tomando $\mathrm{m} = \lfloor \mathrm{M} \rfloor$, temos $\frac{3\mathrm{m}+4}{3} = \lfloor \mathrm{M} \rfloor + \frac{4}{3} > \mathrm{M}$.

b) Dado *k* natural tal que $mdc(k,10)=1$, existe *M* > 0 constante tal que $\frac{\mathrm{S(n)}}{\mathrm{S(kn)}} < \mathrm{M}$ para todo *n* natural?

SOLUÇÃO:

Como *k* é primo com 10 sabemos q existe *d* tal que $10^d \equiv 1 \pmod{k}$ (basta tomar $d = \varphi(k)$, onde φ é a função fi de Euler) então tome o $n = \frac{10^{md}+k-1}{k}$ para *m* inteiro positivo.

Então $n = \frac{10^{md}-1}{k}+1 = \frac{(10^d-1)}{k}(10^{(m-1)d}+10^{(m-2)d}+....+1)+1$ mas como $\frac{(10^d-1)}{k}$ tem menos de *d* dígitos vemos que *n* é formado por *m*-1 cópias de $\frac{(10^d-1)}{k}$ e termina com $\frac{(10^d-1)}{k}+1$ (é fácil ver que $\frac{(10^d-1)}{k}+1<10^d$).

Logo $S(n) = (m-1)S\left(\frac{(10^d-1)}{k}\right) + S\left(\frac{(10^d-1)}{k}+1\right)$, enquanto $S(kn) = 1 + S(k-1)$

tomando $m = \left\lfloor \frac{M(1+S(k-1)) - S\left(\frac{(10^d-1)}{k}+1\right)}{S\left(\frac{(10^d-1)}{k}\right)} \right\rfloor + 2$ vemos que $\frac{S(n)}{S(kn)} > M$.