

# OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 3 – (1º e 2º anos do Ensino Médio)**

**PROVA DISCURSIVA (20 pontos por questão)**

## QUESTÃO 1

Seja  $A$  um conjunto de 2007 números inteiros positivos consecutivos, cujo menor elemento é  $a$ . Determine o menor valor de  $a$  para o qual a soma dos elementos de  $A$  é um quadrado perfeito par.

**SOLUÇÃO:**

Temos  $A = \{a, a+1, a+2, \dots, a+2006\}$ .

A soma dos elementos de  $A$  é  $S = \frac{(a + a + 2006) \cdot 2007}{2} = (a + 1003) \cdot 2007$ .

Como  $2007 = 3^2 \cdot 223$ , devemos ter  $(a+1003) \cdot 223$  quadrado perfeito par. Logo, precisamos ter  $a+1003 = (2k)^2 \cdot 223$ , com  $k$  natural. Como  $a = (2k)^2 \cdot 223 - 1003$ , o menor valor de  $k$  que faz  $a$  ser positivo é  $k = 2$ , o que dá  $a = 2565$ .

## QUESTÃO 2

Dado que  $x$  e  $y$  são reais positivos tais que  $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 33xy = 2662$ , determine o valor numérico de  $S = x + y$ .

**SOLUÇÃO:**

Veja que  $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = S \cdot (S^2 - 3xy)$ .

Substituindo no enunciado, temos que  $S^3 - 3xyS + S^3 + 33xy = 2662$ , logo

$2(S^3 - 11^3) - 3xy(S - 11) = 0$ . Podemos fatorar  $S - 11$ :

$$(S - 11)\left(2S^2 + 22S + 242 - 3xy\right) = 0.$$

Como  $2S^2 + 22S + 242 - 3xy = 2(x+y)^2 + 22S + 242 - 3xy = 2x^2 + xy + 2y^2 + 22S + 242$  é soma de termos positivos, este fator não pode se anular, portanto, devemos ter  $S = 11$ .

## QUESTÃO 3

Prove que  $(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1) \cdot (b^2 + 1) \cdot (c^2 + 1)$ , para todos  $a, b, c$  reais.

**SOLUÇÃO:**

$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$  vale se e somente se

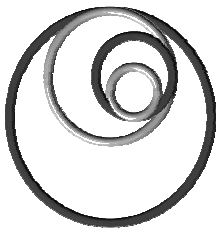
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc^2 + 2acb^2 + 2cba^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 1 \leq$$

$$a^2b^2c^2 + (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 - (2abc^2 + 2acb^2 + 2cba^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2abc(a + b + c) + 2ab + 2bc + 2ac \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(abc - a - b - c)^2 \geq 0 \text{ o que é verdade}$$



# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 3 – (1º e 2º anos do Ensino Médio)**

## QUESTÃO 4

Considere os  $n$  vértices de um polígono regular sobre uma circunferência. Escolhendo-se 3 vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  (distintos) deste polígono aleatoriamente, a probabilidade de o triângulo  $ABC$  ser obtusângulo é  $P$ . Determine os valores de  $n$  para os quais  $P = \frac{1}{2}$ .

### SOLUÇÃO:

Seja  $ABC$  uma possível escolha de um triângulo (de modo que  $A, B, C$  esteja no sentido horário). Fixe de uma vez por todas o vértice  $A$  do triângulo. Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o número de vértices do polígono que estão entre  $A$  e  $B$ ,  $B$  e  $C$ ,  $C$  e  $A$  respectivamente.

Então:

$$(I) \ a + b + c = n - 3 \text{ e } a, b, c \geq 0$$

Agora separamos em dois casos:

#### 1º caso: $n$ par

Seja  $n = 2k$ . Então, para que possua um ângulo obtuso,  $a$ ,  $b$  ou  $c$  deve ser maior ou igual que  $k$ . Agora basta contar quantas soluções possui a equação (I) e quantas destas satisfazem a condição acima.

O número de soluções de (I) é sabido e igual a  $\binom{n-1}{2}$ . Agora, para termos a condição que  $a \geq k$  escrevemos  $a = k + a'$  e agora temos que calcular o número de soluções de  $a + b + c = k - 3$  que é  $\binom{k-1}{2}$ . Podíamos ter escolhido  $b$  ou  $c$ , logo devemos multiplicar por 3.

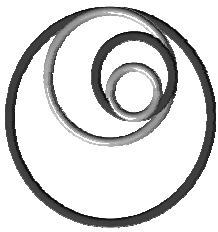
(Veja, também, que não é possível duas variáveis serem maiores ou iguais a  $k$ ). Daí:

$$P = \frac{3 \binom{k-1}{2}}{\binom{n-1}{2}} = \frac{3(k-1)(k-2)}{(2k-1)(2k-2)} = \frac{3(k-2)}{2(2k-1)} \text{ para q seja igual a } \frac{1}{2} \text{ precisamos } k = 5 \text{ logo } n = 10.$$

#### 2º caso: $n$ ímpar

Seja  $n = 2k + 1$  pelos mesmos argumentos anteriores temos que a probabilidade é:

$$P = \frac{3 \binom{k}{2}}{\binom{n-1}{2}} = \frac{3k(k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{3(k-1)}{2(2k-1)} \text{ para que seja igual a } \frac{1}{2} \text{ precisamos ter } k = 2, \text{ logo } n = 5.$$



# OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 3 – (1º e 2º anos do Ensino Médio)**

## QUESTÃO 5

Num triângulo ABC, as medianas relativas aos vértices B e C são perpendiculares. Prove que a soma das cotangentes dos ângulos B e C do triângulo é maior ou igual a  $\frac{2}{3}$ .

### SOLUÇÃO:

Sejam M e N os pontos médios dos lados AC e AB respectivamente. Seja G o baricentro do triângulo e  $x = GM$ ,  $y = GN$ . Temos  $BG = 2x$ ,  $CG = 2y$ .

Sejam u e v os ângulos  $\widehat{CBM}$  e  $\widehat{ABM}$ .

$$\text{Temos que } \tan B = \tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v} = \frac{\frac{y}{x} + \frac{y}{2x}}{1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{2x}} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2}.$$

$$\text{Analogamente, temos } \tan C = \frac{3xy}{2y^2 - x^2}.$$

$$\text{Daí, } \cot B + \cot C = \frac{x^2 + y^2}{3xy} = \frac{1}{3} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

Como x e y são positivos, temos que  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  (vem de  $(x - y)^2 \geq 0$ ).

Isso prova que  $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$ .

---

## QUESTÃO 6

Para cada n natural, defina  $S(n)$  = soma dos dígitos de n (na base 10). Existe  $M > 0$  constante tal que  $\frac{S(n)}{S(3n)} < M$ , para todo n natural?

### SOLUÇÃO:

Considere o número  $n = \underbrace{33\dots34}_{k \text{ dígitos}}$ .

Temos que  $3n = \underbrace{100\dots02}_{k \text{ dígitos}}$ .

Logo,  $\frac{S(n)}{S(3n)} = \frac{3k + 4}{3}$ , que é ilimitado.

Com efeito, tomando  $k = \lfloor M \rfloor$ , temos  $\frac{3k + 4}{3} = \lfloor M \rfloor + \frac{4}{3} > M$ .