OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

***PARTE OBJETIVA** (10 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

Ao substituirmos o símbolo pelos sinais de adição, de subtração ou de multiplicação (+, - ou x) na expressão 2004 2005 2006 2007, quantos inteiros positivos obtemos?

SOLUÇÃO:

As 27 possibilidades de combinações são:

2004	+	2005	+	2006	+	2007	=	8022
2004	+	2005	+	2006	-	2007	=	4007
2004	+	2005	+	2006	x	2007	=	4030051
2004	+	2005	-	2006	+	2007	=	4010
2004	+	2005	-	2006	x	2007	=	negativo
2004	+	2005	x	2006	+	2007	=	**4026041**
2004	+	2005	x	2006	-	2007	=	4022027
2004	+	2005	-	2006	-	2007	=	negativo
2004	+	2005	x	2006	x	2007	=	8072216214
2004	-	2005	+	2006	+	2007	=	4012
2004	-	2005	+	2006	-	2007	=	negativo
2004	-	2005	+	2006	x	2007	=	**4026041**
2004	-	2005	-	2006	+	2007	=	0
2004	-	2005	-	2006	x	2007	=	negativo
2004	-	2005	x	2006	+	2007	=	negativo
2004	-	2005	x	2006	-	2007	=	negativo
2004	-	2005	-	2006	-	2007	=	negativo
2004	-	2005	x	2006	x	2007	=	negativo
2004	x	2005	+	2006	+	2007	=	4022033
2004	x	2005	+	2006	-	2007	=	4018019
2004	x	2005	+	2006	x	2007	=	8044062
2004	x	2005	-	2006	+	2007	=	4018021
2004	x	2005	-	2006	x	2007	=	negativo
2004	x	2005	x	2006	+	2007	=	8060150127
2004	x	2005	x	2006	-	2007	=	806014113
2004	x	2005	-	2006	-	2007	=	4014007
2004	x	2005	x	2006	x	2007	=	positivo

<u>São 16</u>.

Não pode-se contar um repetido duas vezes, já que a pergunta foi “quantos inteiros positivos obtemos?”.

QUESTÃO 2

Manoel escreveu os números naturais de 1 até 2007. Em seguida, sublinhou todos os números divisíveis por 3, depois sublinhou todos os números divisíveis por 5 e, por fim, sublinhou todos os números divisíveis por 6. Quantos números foram sublinhados apenas duas vezes?

SOLUÇÃO:

- ✓ Os números múltiplos comuns de 3 e 5 (Múltiplos de 15) são 133 (2007:15).
- ✓ Os números múltiplos comuns de 3 e 6

  (Múltiplos de 6) são 334 (2007: 6).
- ✓ Os números múltiplos comuns de 5 e 6 são também múltiplos comuns de 3, 5 e 6, já que são múltiplos de 30. São ao todo 66 (2007:30).

Temos então, números sublinhados apenas duas vezes: (133-66) + (334-66) que dá **335 números**.

QUESTÃO 3

Qual a forma simplificada do produto:

$$3 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{2006}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{2007}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{2008}\right)$$

SOLUÇÃO:

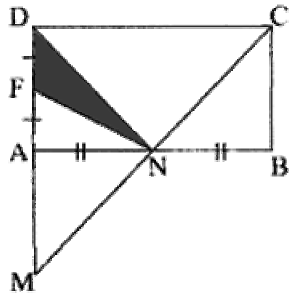
$$3.\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{4}\right)....\left(\frac{2005}{2006}\right).\left(\frac{2006}{2007}\right).\left(\frac{2007}{2008}\right)$$

$$3.\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right).\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right).\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)....\left(\frac{\cancel{2005}}{\cancel{2006}}\right).\left(\frac{\cancel{2006}}{\cancel{2007}}\right).\left(\frac{\cancel{2007}}{2008}\right)$$

$$3.\left(\frac{1}{2008}\right) = \frac{3}{2008}$$

QUESTÃO 4

ABCD é um retângulo. N é o ponto médio de $\overline{AB}$ e F é o ponto médio de $\overline{DA}$. Sendo M a projeção de $\overline{DA}$ sobre $\overline{CN}$, Determine a razão entre a área do ΔFND e a área do Pentágono DMNBC.



SOLUÇÃO:

A razão entre a área do triângulo $\overline{FND}$ e a área do Pentágono $\overline{DMNBC}$:

$$\frac{\overline{\mathbf{FND}}}{\overline{\mathbf{DMNBC}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$$

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

PARTE DISCURSIVA ***(20 pontos por questão)***

QUESTÃO 5

Num determinado momento na final de futsal dos jogos escolares da Cidade de Tribobó do Norte, Fabinho percebeu que o número de meninos presentes no Ginásio era três vês mais que o número de meninas. Após a chegada de um ônibus com 72 meninas e 88 meninos, a porcentagem de meninas no Ginásio passou a ser 30%. Quantos meninos e quantas meninas passaram a estar no ginásio após da chegada desse ônibus?

SOLUÇÃO:

1º Momento	**2º Momento**
$x \begin{cases} 25\% \text{ meninas} \\ 75\% \text{ meninos} \end{cases}$	$x + 16 \begin{cases} 30\% \text{ meninas} \\ 70\% \text{ meninos} \end{cases}$

$$25\%\, x + 72 = 30\%\, (x + 160)$$

$$\frac{25x}{100} + 72 = \frac{30}{100}(x + 160)$$

$$\frac{25x}{100} + 72 = \frac{30x}{100} + \frac{30\,.\,160}{100}$$

$$\frac{25x}{100} + \frac{7200}{100} = \frac{30x}{100} + \frac{4800}{100}$$

$$25x + 7200 = 30x + 4800$$

$$5x = 2400$$

$$x = 480$$

Estavam no ginásio após a chegada do ônibus 30% de 640 = **192 meninas** e 70% de 640 = **448 meninos**.

QUESTÃO 6

Considere os lados de dois quadrados medindo **p** e **q**. E as seguintes informações:

- ✓ A soma das áreas desses dois quadrados é de $15{,}3m^2$;
- ✓ O produto das suas diagonais é 13,86m.

Determine o valor de S, sendo S = p+ q.

SOLUÇÃO:

$\begin{cases} p^2 + q^2 = 15{,}3m^2 \\ p\sqrt{2}\,.\,q\sqrt{2} = 13{,}86m \end{cases}$	$\Longrightarrow$	$\begin{cases} p^2 + q^2 = 15{,}3m^2 \\ 2pq = 13{,}86m \end{cases}$

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

$$(p + q)^2 = 15{,}3 + 13{,}86$$

$$(p + q)^2 = 29{,}16$$

$$p + q = \sqrt{29{,}16}$$

$$p + q = 5{,}4 \text{ m}$$

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 7

Num folheto de propaganda, uma montadora explica que um veículo equipado com a tecnologia flex fuel, bicombustível, pode usar álcool, gasolina, ou uma mistura de álcool e gasolina em qualquer proporção. Testes realizados com cinco proporções apresentaram os seguintes desempenhos:

Proporção de combustível		**Consumo (km por litro)**
Álcool	***Gasolina***	
-----	100%	14
40%	60%	13
50%	50%	12
70%	30%	10
100%	-----	7

Considere que o preço do litro de álcool é R$ 1,80 e o preço do litro de gasolina é R$ 2,50.

Numa viagem de 546 km com esse veiculo:

a) Quantos reais seriam economizados, se o carro fosse abastecido somente com álcool do que fosse abastecido somente com gasolina?

SOLUÇÃO:

(546 Km : 7) = 78 litros de álcool
(546 Km : 14) = 39 litros de gasolina

Álcool : 78 x 1,80 = 140,40
Gasolina : 39 x 2,50 = 97,50

A diferença é de (140,40 – 97,50): R$ 42,90

Não há uma economia e sim um prejuízo caso o carro fosse abastecido apenas por álcool do que apenas por gasolina.

b) Qual das cinco proporções apresentadas possibilita o menor gasto com combustível?

SOLUÇÃO:

Trabalhando as 5 possibilidades:

- Somente álcool: R$ 140,40
- Somente gasolina: R$ 97,50
- 40% de álcool e 60% de gasolina:

$$546:13 = 42 \text{ litros} \begin{cases} 40\% = 16{,}8 \text{ litros} = \text{R\$ } 30{,}24 \\ 60\% = 25{,}2 \text{ litros} = \text{R\$ } 63{,}00 \end{cases} \Rightarrow \text{R\$ } 93{,}24$$

- 50% de álcool e 50% de gasolina:

$$546:13 = 45{,}5 \text{ litros} \begin{cases} 50\% = 22{,}75 \text{ litros} = \text{R\$ } 40{,}95 \\ 50\% = 22{,}75 \text{ litros} = \text{R\$ } 56{,}875 \end{cases} \Rightarrow \text{R\$ } 97{,}825$$

- 70% de álcool e 30% de gasolina:

$$546:10 = 54{,}6 \text{ litros} \begin{cases} 70\% = 38{,}22 \text{ litros} = \text{R\$ } 68{,}796 \\ 30\% = 16{,}38 \text{ litros} = \text{R\$ } 40{,}95 \end{cases} \Rightarrow \text{R\$ } 109{,}746$$

A opção mais econômica é a colocar
40% de álcool e 60% de gasolina
cujo valor fica em **R$ 93,24**

QUESTÃO 8

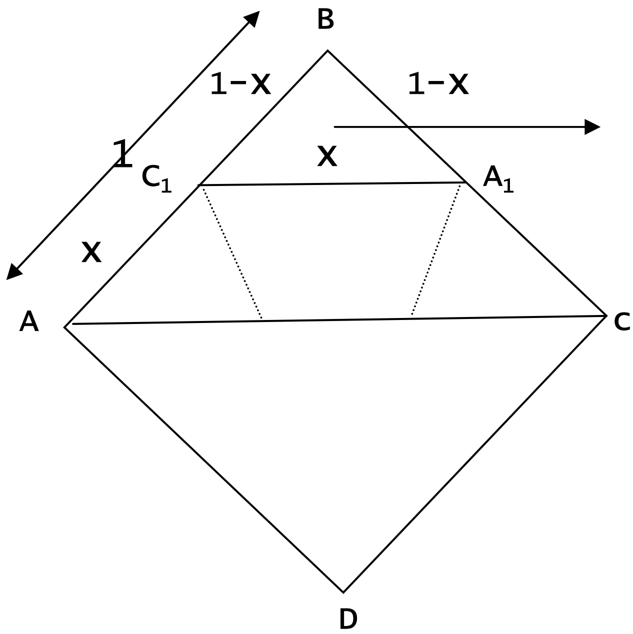
Pega-se um quadrado de papel ABCD, com lado um e vamos fazer um copo.

- Dobra-se ao longo da diagonal AC, e agora temos um triangulo retângulo ABC, com angulo reto em B.
- Leva-se o ponto C ao lado AB, obtendo o ponto C_1 e o ponto A ao lado BC obtendo o ponto A_1, de modo a que o segmento A_1C_1 fique paralelo a AC.
- Depois é só dobrar ao longo de A_1C_1 abaixando B para um lado e D para o outro.

Calcule a distancia de A a C_1.

Sugestão: Pegue uma folha e dobre-a, fazendo o copo.

SOLUÇÃO:



Pitágoras:

$x^2 = (1 - x)^2 + (1 - x)^2$

$x^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\begin{cases} \cancel{2+\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{\text{Dá mais de 3.}} \\ 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

Logo a resposta é

$$\mathbf{2 - \sqrt{2}}$$