



OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Nível 3 – 1^a e 2^a séries do ensino médio

30 de setembro de 2006

Questão 1

Uma calculadora tem as teclas X^{-1} e $[1-X]$. Começando com 2006 no visor, um aluno digita a tecla X^{-1} e depois a $[1-X]$. Repete o processo 2006 vezes, isto é, são apertadas 2006 vezes cada tecla, alternadamente. Que número aparece no visor no fim do processo?

Questão 2

A livraria Majorando vende n tipos de livros (tipo 1, 2, 3, ...). O preço do livro tipo i é 7^{i-1} reais ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Frida comprou um total de 6 livros (não necessariamente distintos) e gastou 408 reais. Quantos tipos diferentes de livro ela comprou?

Questão 3

Seja x um número real positivo.

a) Mostre que $x^2 - 2x + 1 = 0$.

b) Moste que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

c) Determine o menor valor que pode assumir a expressão $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x}$.

Questão 4

Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo x não-nulo: $2xf(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

Questão 5

Seja O o centro do círculo circunscrito a um triângulo ABC . Sejam S_1, S_2, S_3 respectivamente as áreas dos triângulos ABO, ACO, BCO . Mostre que existe um triângulo cujos lados são numericamente iguais a S_1, S_2, S_3 .

Questão 6

Considere um pentágono equiângulo, mas não equilátero (ângulos iguais, mas pelo menos dois lados diferentes). Seja P um ponto interior ao pentágono.

Mostre que a soma das distâncias de P aos lados do pentágono independe da posição de P dentro do pentágono.