OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Nível 4 – 3ª série do ensino médio e pré-universitário

24 de setembro de 2005

Questão 1

Considere as matrizes da forma $\boldsymbol{A_x} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Determine a matriz $\boldsymbol{B = A_1 \cdot A_3 \cdot A_5 \cdot \ldots \cdot A_{2005}}$.

Solução:

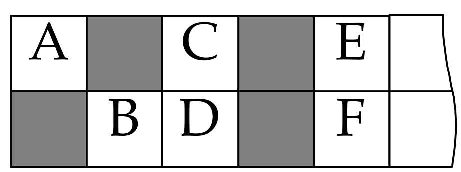
Observe que $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0+x\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 1+x\cdot 0 & 1\cdot y+0\cdot 0+x\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot y+1\cdot 0+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot y+0\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo $B = A_{1+3+5+\ldots+2005} = A_{\frac{2006\cdot 1003}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1006009 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Questão 2

Para destruir o laboratório-ilha do terrorista Lad Binen, o agente secreto James Ponte plantou uma bomba no interior do laboratório. Infelizmente, devido à explosão, um tanque de monóxido de dihidrogênio (MDH) se rompeu, causando uma chuva deste composto sobre a única ponte existente ligando o laboratório à terra firme.



A única forma de sair do laboratório é através dessa ponte, que é retangular e tem dois metros de largura por 2005 metros de comprimento. Ela é formada por placas quadradas, cada uma com lado um metro, conforme ilustra a figura. Cada uma dessas placas, independentemente, tem probabilidade $1/3$ de ser totalmente dissolvida pelo MDH despejado pela explosão.

Partindo de um determinado quadrado da ponte, James Ponte pode pular para qualquer outro quadrado que tenha um lado ou um vértice em comum com o quadrado em que ele está e que não tenha sido dissolvido. James não consegue pular distâncias maiores do que estas. Por exemplo, na figura acima, James pode, partindo de A, chegar a B, C ou D, mas não a E ou F.

Qual é a probabilidade de que James Ponte consiga escapar do laboratório?

Solução:

Observe que como James Ponte pode pular em diagonal, a única coisa que pode bloquear o seu progresso é a destruição de dois quadrados de uma mesma fileira da ponte. Logo a probabilidade de James Ponte conseguir fugir do complexo é $(1-p)^{2005}$, onde p é a probabilidade de uma fileira inteira da ponte se dissolver. Mas isso só ocorre se os dois quadrados de uma determinada fileira se dissolverem, logo $p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, logo James Ponte foge do complexo com probabilidade $\left(\frac{8}{9}\right)^{2005}$.

Questão 3

Encontre todas as funções $f : \Re \to \Re$ tais que, para todos os $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ reais,

$$\boldsymbol{f(x \cdot f(y)) = f(x \cdot y) + x}$$

Solução:

Fazendo $y = 0$ na equação original obtemos, para todo x:

$$f(x \cdot f(0)) = f(0) + x \quad \text{(I)}$$

Fazendo $x = f(0)$ também na equação original:

$$f(f(0) \cdot f(y)) = f(f(0) \cdot y) + f(0) \quad \text{(II)}$$

Fazendo x = f(t) em (I), $y = t$ em (II) e substituindo:

$$\begin{cases} f(f(t) \cdot f(0)) = f(0) + f(t) \\ f(f(0) \cdot f(t)) = f(f(0) \cdot t) + f(0) \quad (III) \end{cases}$$

Por (I), o lado direito de (III) vale $f(0) + t + f(0)$. Logo,

$$f(0) + f(t) = f(0) + t + f(0) \Rightarrow f(t) = t + f(0)$$

Substituindo esse resultado em (I):

$$x \cdot f(0) + f(0) = f(0) + x \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$$

Reciprocamente, é fácil verificar que essa função de fato satisfaz o problema.

Questão 4

Considerando como universo o conjunto dos reais, determine o conjunto solução da equação

$$\boldsymbol{\sqrt{4x - 8} + \sqrt[3]{14x - 20} = \sqrt{24 - 4x} + \sqrt[3]{2092 - 182x}}$$

Solução:

Como estamos procurando soluções reais, devemos ter $\begin{cases} 4x - 8 \geq 0 \\ 24 - 4x \geq 0 \end{cases}$, logo $2 \leq x \leq 6$.

Sejam $f : [2,6] \to \Re$ e $g : [2,6] \to \Re$ as funções definidas por:

$f(x) = \sqrt{4x - 8} + \sqrt[3]{14x - 20}$, $g(x) = \sqrt{24 - 4x} + \sqrt[3]{2092 - 182x}$.

Temos que f é função crescente e g é função decrescente.

Veja que $f(2) = 2$, $f(6) = 8$, $g(2) = 16$ e $g(6) = 10$. Portanto temos que:

$2 \leq f(x) \leq 8$ e $10 \leq g(x) \leq 12$

Logo, o conjunto solução é vazio.

Questão 5

Sejam $\mathbf{H}$ e $\mathbf{O}$ respectivamente o ortocentro e o circuncentro de um triângulo $\triangle \boldsymbol{ABC}$. Seja $\mathbf{N}$ o ponto médio do lado $\overline{\mathbf{BC}}$ e $\mathbf{D}$ o pé da altura relativa ao lado $\overline{\mathbf{BC}}$. Sabendo que $\mathbf{HOND}$ é um retângulo e que $\overline{\mathbf{HO}} = \mathbf{11}$, $\overline{\mathbf{ON}} = \mathbf{5}$, calcule o comprimento do lado $\overline{\mathbf{BC}}$.

Solução 1:

Seja M o ponto médio de AC. Os triângulos AHB e ONM são semelhantes pois possuem lados 2 a 2 paralelos. Como $\overline{MN}$ é base média, isso implica $\overline{AH} = 2\overline{ON} \Rightarrow \overline{AH} = 10$

No triângulo retângulo *OHA* temos $\overline{AO}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 = 221$

Como O é circuncentro, $\overline{OA} = \overline{OC}$ e portanto $\overline{NC}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 = 221$.

Segue que $\overline{NC}^2 = 221 - 25 = 196 \Rightarrow \overline{NC} = 14 \Rightarrow \overline{BC} = 2\overline{NC} = 28$.

Solução 2:

Colocando um eixo cartesiano com a origem em *M*, podemos colocar *C* = (*c*, 0) e *B* = (-c, 0).

Como $\overline{ON} = 5\ e\ \overline{OH} = 11$, podemos s.p.g colocar $H = (11,5)$, O = (0, 5), *A* = (11, *h*).

Como *O* é circuncentro, $\overline{OA} = \overline{OC}$ e $(h-5)^2 + 11^2 = 5^2 + a^2$ *(I)*

$$\overline{AC} \perp \overline{BH} \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BH} = -1 \Rightarrow \frac{h}{11-a} \cdot \frac{5}{11+a} = -1 \Rightarrow 5h = a^2 - 11^2\ (II)$$

Substituindo o valor de a^2 em *(I)* obtemos *h* =15.

Substituindo em *(II)* isso dá $a^2 = 196$ e portanto $\overline{BC} = 2a = 28$

Questão 6

Considere uma hipérbole **H**, com assíntotas **r** e **s** e focos **F** e **F′**. Seja **M** um ponto qualquer de **H** e **t** a tangente a **H** em **M**. Se $\mathbf{P} = \mathbf{r} \cap \mathbf{t}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{s} \cap \mathbf{t}$, prove que **P**, **Q**, **F** e **F′** pertencem a um mesmo círculo.

Solução:

Podemos supor, spg, que a equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

A tangente num ponto (x_0, y_0) é dada por $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

As assíntotas são dadas por $y = \dfrac{b}{a}x\ \ e\ \ y = -\dfrac{b}{a}x$.

Calculando as interseções:

$$P = r \cap t : x_p = \frac{a^2 b}{x_0 b - a y_0},\ y_p = \frac{ab^2}{x_0 b - a y_0}$$

Analogamente, trocando *b* por – *b*:

$$Q = x_q = \frac{a^2 b}{x_0 b + a y_0},\ y_q = \frac{-ab^2}{x_0 b + a y_0}$$

Temos $U = \overline{PQ} \cap \overline{FF'} \Rightarrow U \in eixo\ x \Rightarrow x_u = \dfrac{a_2}{x_0},\ y_u = 0$

$$\overline{UF} = c - \frac{a^2}{x_0}, \ \overline{UF'} = c + \frac{a^2}{x_0} \Rightarrow \overline{UF} \cdot \overline{UF'} = c^2 - \frac{a^4}{x_0^2}$$

Usando a fórmula de distância entre pontos temos:

$$\overline{UP} = \sqrt{\left(\frac{a^2 b}{x_0 b - a y_0} - \frac{a^2}{x_0}\right)^2 + \frac{a^2 b^4}{(x_0 b - a y_0)^2}} = \frac{a\sqrt{a^4 y_0^2 + b^4 x_0^2}}{\left|x_0 (x_0 b - a y_0)\right|}$$

Analogamente, $\overline{UQ} = \dfrac{a\sqrt{a^4 y_0^2 + b^4 x_0^2}}{\left|x_0 (x_0 b + a y_0)\right|}$ e portanto $\overline{UP} \cdot \overline{UQ} = \dfrac{a^2}{x_0^2} \cdot \dfrac{a^4 y_0^2 + b^4 x_0^2}{\left|x_0^2 b^2 - a^2 y_0^2\right|}$

Substituindo $y_0^2 = \dfrac{b^2 x_0^2}{a^2} - b^2$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $\overline{UP} \cdot \overline{UP'} = \overline{UF} \cdot \overline{UF'}$ e portanto os pontos F, F', P, P' são cocíclicos.