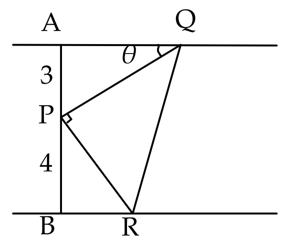
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Nível 3 – 1ª e 2ª séries do ensino médio

24 de setembro de 2005

Questão 1

Na figura ao lado, o triângulo $\triangle \mathbf{PQR}$ é retângulo em $\mathbf{P}$, $\overline{\mathbf{AP}} = \mathbf{3}$, $\overline{\mathbf{PB}} = \mathbf{4}$, e o segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{\mathbf{AQ}}$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{BR}}$.



a) Determine, em função do ângulo θ, a área do triângulo $\triangle \mathbf{PQR}$.

b) Determine o menor valor que a área do triângulo $\triangle \mathbf{PQR}$ pode assumir quando $0° < \theta < 90°$.

Solução:

a) Como $B\hat{P}R = \theta$, temos $\overline{PQ} = \dfrac{3}{sen\theta}$, $\overline{PR} = \dfrac{4}{\cos\theta}$ e portanto

$$S = \frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{PR} = \frac{12}{2sen\theta\cos\theta} = \frac{12}{sen(2\theta)}$$

b) Como $sen(2\theta) \le 1$, temos $S \ge 12 \therefore S_{\min} = 12$.

Questão 2

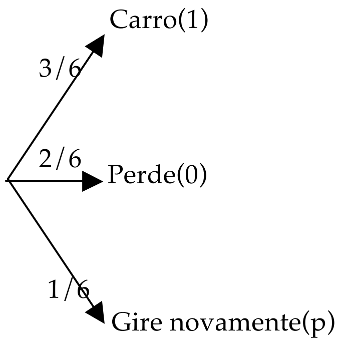
Após passar por diversas etapas em um programa de auditório, Larissa foi convidada para sortear o seu prêmio (um carro zero quilômetro). O sorteio é realizado com uma roleta circular, dividida em 6 setores de mesma área: três estão marcados como “Carro”, dois como “Perde” e um como “Gire novamente”. Para descobrir qual prêmio ganhará, Larissa deve girar a roleta.

Se a roleta parar em “Carro”, Larissa ganha o carro; se ela parar em “Perde”, Larissa volta para casa sem nada; se a roleta parar em “Gire novamente”, ela deve girar a roleta outra vez (não há limite no número de repetições permitidas).

Qual é a probabilidade de Larissa ganhar o carro?

Solução:

Seja p a probabilidade de ganhar o carro. Há probabilidade $\dfrac{3}{6}$ de ganhar o carro na primeira rodada, e $\dfrac{1}{6}$ de ter a oportunidade de girar novamente (e nesse caso ter probabilidade p de ganhar como antes), conforme ilustra o diagrama abaixo:



Temos portanto $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot p \Rightarrow p = \frac{3}{5} = 60\%$

Observação: Solução alternativa, baseada em um diagrama infinito e usando-se a fórmula da *PG*:

$$p = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{3}{6} + \ldots = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{3}{5}$$

Questão 3

Encontre todas as soluções inteiras de $\boldsymbol{4x + x^2 - x^3 = 4y + y^2 - y^3}$.

Solução:

Passando tudo para o lado esquerdo e fatorando:

$$4(x - y) + (x^2 - y^2) + (y^3 - x^3) = 0$$
$$4(x - y) + (x + y)(x - y) + (y - x)(y^2 + xy + x^2) = 0$$
$$(y - x) \cdot (-4 - x - y + y^2 + xy + x^2) = 0$$

Uma família de soluções é dada pelos pares da forma (x, x). (correspondente a $x = y$)

Igualando o segundo parêntesis a zero temos:

$$x^2 + yx - x + y^2 - y - 4 = 0$$
$$x^2 + (y - 1)x + (y^2 - y - 4) = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em x:

$$\Delta = (y - 1)^2 - 4(y^2 - y - 4) = -3y^2 + 2y + 17$$

Essa equação tem solução sse $\Delta \geq 0$. Para y inteiro, isto é equivalente a $-2 \leq y \leq 2$.

Testando y = -2, -1, 0, 1, 2 obtemos as demais soluções: (1, -2); (2, -2); (2,1); (-2, 1); (-2,2); (1,2).

Questão 4

a) Sejam $\mathbf{H}$ o ortocentro e $\mathbf{O}$ o circuncentro de um triângulo $\triangle \mathbf{ABC}$. Seja $\mathbf{M}$ o ponto médio de $\overline{\mathbf{AC}}$ e $\mathbf{N}$ o ponto médio de $\overline{\mathbf{BC}}$. Mostre que os triângulos $\triangle \mathbf{AHB}$ e $\triangle \mathbf{NOM}$ são semelhantes.

b) No mesmo triângulo do item anterior, seja **D** o pé da altura relativa ao lado $\overline{\mathbf{BC}}$. Sabendo que **HOND** é um retângulo e que $\overline{\mathbf{HO}} = \mathbf{11}$, $\overline{\mathbf{ON}} = \mathbf{5}$, calcule o comprimento do lado $\overline{\mathbf{BC}}$.

(O ortocentro é o encontro das alturas de um triângulo, e o circuncentro é o encontro das mediatrizes.)

Solução 1:

a) $\overline{OM} \,//\, \overline{BH}$, pois ambos são perpendiculares ao lado $\overline{AC}$. Analogamente, $\overline{ON} \,//\, \overline{AH}$.

Como $\overline{MN}$ é base média do triângulo, temos $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$.

Portanto os dois triângulos têm lados 2 a 2 paralelos e conseqüentemente são semelhantes.

b) Da semelhança anterior temos $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{ON}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = 2 \Rightarrow \overline{AH} = 2\overline{ON} = 10$.

No triângulo retângulo *OHA* temos $\overline{AO}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 = 221$

Como O é circuncentro, $\overline{OA} = \overline{OC}$ e portanto $\overline{NC}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 = 221$.

Segue que $\overline{NC}^2 = 221 - 25 = 196 \Rightarrow \overline{NC} = 14 \Rightarrow \overline{BC} = 2\overline{NC} = 28$.

Solução 2 para (b):

Colocando um eixo cartesiano com a origem em *M*, podemos colocar *C* = (*c*, 0) e *B* = (-c, 0).

Como $\overline{ON} = 5$ *e* $\overline{OH} = 11$, podemos s.p.g colocar $H = (11, 5)$, O = (0, 5), *A* = (11, *h*).

Como *O* é circuncentro, $\overline{OA} = \overline{OC}$ e $(h-5)^2 + 11^2 = 5^2 + a^2$ *(I)*

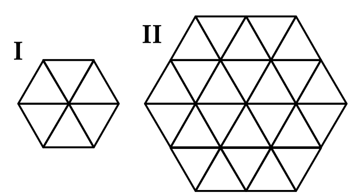
$$\overline{AC} \perp \overline{BH} \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BH} = -1 \Rightarrow \frac{h}{11-a} \cdot \frac{5}{11+a} = -1 \Rightarrow 5h = a^2 - 11^2 \; (II)$$

Substituindo o valor de a^2 em *(I)* obtemos $h = 15$.

Substituindo em *(II)* isso dá $a^2 = 196$ e portanto $\overline{BC} = 2a = 28$

Questão 5

Alex está brincando de fazer arranjos com palitos. Ele dispõe seus palitos formando triângulos equiláteros, como mostra a figura ao lado. Alex quer pintar cada palito de seu arranjo de tal forma que cada triângulo tenha seus lados pintados de exatamente duas cores diferentes. Para isso, ele dispõe de tintas vermelha, azul e preta.

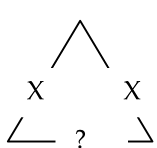


De quantas formas Alex pode realizar essa pintura (a) no arranjo **I**? (b) no arranjo **II**?

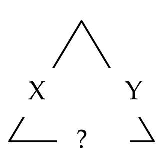
a) Os seis raios que partem do centro do hexágono podem ser pintados de três maneiras. Cada um dos seis triângulos formados podem ser completados de duas maneiras diferentes, independentemente das cores dos dois palitos pintados:

(as três cores são denotadas pela letras X, Y e Z)

Caso I



Caso II

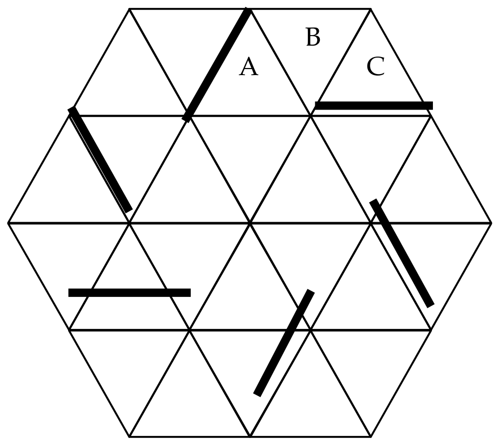


I = Neste caso, a cor do palito que falta tem que ser uma das duas cores não utilizadas, Y ou Z.

II = Neste caso, o palito que falta deve ser pintado com a cor X ou Y.

Logo o número total de pinturas é $3^6 \times 2^6 = 6^6$.

b) Comece pintando o hexágono interno como no item (a), e pinte seis palitos nos prolongamentos dos lados deste hexágono, como indicado na figura:



Em cada trapézio formado pelos triângulos A, B e C, podemos começar completando o triângulo A de duas maneiras, pintando a aresta entre B e C de três maneiras, e completando os triângulos B e C de duas maneiras cada. Logo podemos completar a pintura de $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras diferentes para cada trapézio. Logo há, no total, $6^6 \times 3^6 \times 24^6 = 12^{12} \times 3^6$ maneiras de pintar o arranjo **II**.

Questão 6

Considerando como universo o conjunto dos reais, determine o conjunto solução da equação

$$\sqrt{4x-8} + \sqrt[3]{14x-20} = \sqrt{24-4x} + \sqrt[3]{2092-182x}$$

Solução:

Como estamos procurando soluções reais, devemos ter $\begin{cases} 4x-8 \geq 0 \\ 24-4x \geq 0 \end{cases}$, logo $2 \leq x \leq 6$.

Sejam $f:[2,6] \to \Re$ e $g:[2,6] \to \Re$ as funções definidas por:

$f(x) = \sqrt{4x-8} + \sqrt[3]{14x-20}$, $g(x) = \sqrt{24-4x} + \sqrt[3]{2092-182x}$.

Temos que f é função crescente e g é função decrescente.

Veja que $f(2) = 2$, $f(6) = 8$, $g(2) = 16$ e $g(6) = 10$. Portanto temos que:

$2 \leq f(x) \leq 8$ e $10 \leq g(x) \leq 12$

Logo, o conjunto solução é vazio.