OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Nível 2 – 7ª e 8ª séries do ensino fundamental

24 de setembro de 2005

PARTE OBJETIVA (Cada questão vale 10 pontos)

Questão 1

Professor Fabio das Medalhas incentivou seus alunos a participar da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), que possui apenas três níveis de disputa (Nível 1 – 5ª e 6ª séries; Nível 2 – 7ª e 8ª séries e Nível 3 para todo o ensino médio). No dia da prova ele passou mal e pediu a um colega que lhes aplicasse a prova e fizesse um relatório de análise.

A prova foi aplicada para 34 alunos. Segundo o relatório, 10 rapazes fizeram a prova no nível 1 e nenhum fez a prova no nível 3; 11 moças fizeram a prova do nível 2. Sabendo que estavam presentes 12 rapazes ao todo que somente 2 alunos fizeram a prova do nível 3, quantos alunos fizeram a prova do nível 2?

Solução:
Aplicando uma tabela de dupla entrada teremos:

	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Total
Rapazes	10	2	0	12
Moças	9	11	2	22
Total	19	13	2	34

Logo 13 alunos fizeram aprova do N2.

Questão 2

O tesouro de um faraó é protegido por uma porta que se abre com uma senha numérica. Nas paredes da tumba, arqueólogos decifraram as seguintes mensagens:

- A senha é o produto de três números.
- A soma dos três números é 128.
- O primeiro menos o segundo é igual ao terceiro.
- O segundo número é igual a um terço do terceiro.

Determine a senha que abre a porta do tesouro.

Solução:
Temos que pela equação fundamental da subtração (1) $x-y=z$. Também é dado que (2) $x+y+z=128$ e que (3) $z=3y$.
Substituindo (3) em (1) teremos que: $x= 4y$ e aplicando em (2) obtemos que: $8y=128$ ou $y=16$
Logo: $x= 4.16=64$ e $z=3.16=48$, ou seja, $x.y.z=64.16.48=49.152$.

Questão 3

Sendo k e n números inteiros primos entre si, qual a fração irredutível mais simples da expressão a seguir?

$$\left(1+\frac{k-n}{k+n}\right)\div\left(1-\frac{k-n}{k+n}\right)$$

Solução:

Fazendo o MMC e igualando os denominadores das frações algébricas obtemos:

$$\left(\frac{k+n+k-n}{k+n}\right)\div\left(\frac{k+n-k+n}{k+n}\right)=$$

Reduzindo os termos semelhantes teremos:

$$\frac{2k}{k+n}\div\frac{k+n}{2n}=$$

Simplificando obtemos: $\dfrac{k}{n}$

Questão 4

Seja $\mathbf{ABCDE}$ um pentágono convexo inscrito em uma circunferência, onde α equivale à medida do ângulo do vértice $\mathbf{A}$ com medida de 100° e β equivale ao ângulo formado pelo vértice $\mathbf{B}$ com a diagonal $\overline{BD}$ com medida de 30°. Sendo $\mathbf{I}$ o ponto de encontro da diagonal $\overline{BD}$ com a diagonal $\overline{CE}$, calcule o ângulo BIC.

Solução:

Como ABCE é um quadrilátero inscrito na Circunferência α+ x (o ângulo do vértice C) = 180º. logo x=80º. Assim BÎC+ 30º + 80º = 180º, ou seja, BÎC = 70º.

PARTE DISCURSIVA (Cada questão vale 20 pontos)

Questão 5

De acordo com o regulamento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), cada escola deve selecionar, para a segunda fase, 5% do total de alunos inscritos para a primeira fase em cada um dos níveis. Se o número equivalente a esses 5% não for um número inteiro, ele deve ser aproximado para o número inteiro imediatamente superior. Exemplo:

Descrição	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Alunos inscritos na 1ª fase	200	164	19
5% dos alunos inscritos na 1ª fase	10	8,2	0,95
Alunos que poderão fazer a 2ª fase	10	9	1

Uma escola classificou para a segunda fase, em um dos níveis que participava, 26 alunos. Determine a quantidade de participantes dessa escola na primeira fase, sabendo que ela corresponde a um número primo cuja soma dos algarismos vale 8.

Solução:

a) Pelo enunciado temos que $5\% \leq 26$.
b) Assim, o dobro seria $10\% \leq 52$.
c) Para achar a totalidade teríamos $100\% \leq 520$. Como 520 não atende as condições do enunciado (é composto e a soma de seus algarismos é 7), devemos verificar os números inteiros menores que ele cuja a soma de seus algarismos seja 8.
d) No intervalo entre 501 e 519 (5% de 500 representa valor inteiro 25 sendo fora do limite do enunciado) temos apenas dois números que satisfazem essa primeira condição: 503 e 512. Como 512 é par (forma 2k), ele certamente é composto.
e) Resta comprovar que 503 é primo. Podemos usar o Crivo de Eratóstenes ou uma solução mais rápida.
f) Uma prova válida seria utilizar o seguinte algoritmo derivado do próprio crivo de Eratóstenes: dado N, tenta-se dividi-lo, sucessivamente, pelos números primos n = 2, 3, ..., até o maior inteiro inferior à raiz quadrada de N. Se nenhum desses números divide N, então ele é primo. Se N_o divide N, escrevemos $N = N_oN_1$, onde $N_1 < N$, e repete-se o mesmo processo para N_o e N_1. Isto fornece a decomposição completa de N em fatores primos.
g) Assim, dividindo 503 (N) pelos primos inferiores a sua raiz quadrada (≅22,4), não encontraremos divisão inteira exata (Sem restos), o que prova que 503 é primo e, portanto, satisfaz as condições do problema.

Importante:

O grande problema deste processo é que, para valores de N muito grandes, o algoritmo exige muito tempo e muitos cálculos para decidir se N é primo ou composto. Para o problema em questão usamos o seguinte conjunto de números primos P={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.

Questão 6

Um grupo de rapazes e moças saiu para comer pizza. No restaurante em que foram as pizzas são cortadas em doze pedaços iguais. Maria observou que cada rapaz comeu 6 ou 7 pedaços e cada moça, 2 ou 3 pedaços. Eles pediram quatro pizzas que foram totalmente consumidas e depois pediram mais uma, da qual sobraram alguns pedaços. Quantos rapazes e moças foram à pizzaria?

Solução:

Seja x e y o número de rapazes e moças, respectivamente. Teremos:

$7x + 3y \leq 59$ (1)

$6x + 2y \geq 49$ (2)

Eliminando por diferença o sistema teremos: $x + y \leq 10$

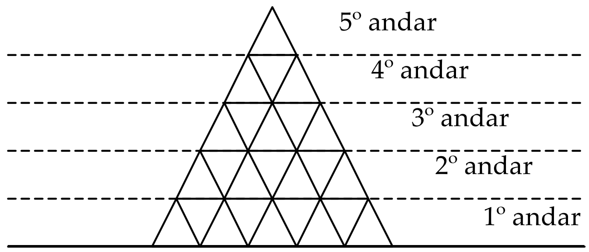
Substituindo em (2), teremos: $6x + 2(10 - x) \geq 49$, donde $x \geq 8$.

Mas como em (1) implica que $x \leq 8$. Só temos a igualdade como opção, ou seja, $x = 8$.

Substituindo este valor nas desigualdades anteriores obteremos $y = 1$.

Questão 7

Para obter uma torre de cartas de 5 andares, como a indicada na figura, são utilizadas 40 cartas de baralho dispostas na horizontal, como bases dos andares, e inclinadas. Quantas cartas do mesmo tipo seriam necessárias para construir uma torre de 100 andares? (Na base da torre não são utilizadas cartas na horizontal pois esta está apoiada em uma superfície lisa.)



Solução:
Se analisarmos a seqüência de cartas veremos que a base da torre utilizará 2x100 cartas. Em seguida teremos mais 99 cartas na horizontal que servirão para sustentar a próxima seqüência que seria de 2x99 cartas. Logo, podemos deduzir o seguinte: (2x100+99) + (2x99+98) + (2x98+97) + . . . + (2x2+1) + 2x1.
Podemos reorganizar a seqüência fatorando-a da seguinte forma: 2 x (100+99+98+. . .+3+2+1) + (99+98+97+. . . + 3+2+1).
Para a primeira seqüência podemos considerar que ela possui 100 termos eqüidistantes divididos em 50 pares cuja soma é a mesma: 100+1 = 99+2 = 98+3 = . . . = 50+51 = 101. Logo essa soma é 50 x 101 = 5050 (Façanha de Gauss!!!!).
Para a segunda seqüência não é difícil verificar o mesmo processo menos o termo 100, logo teremos 5050 – 100 = 4950.
Para finalizar ficamos assim: 2 x 5050 + 4950 = 15050 cartas.

Questão 8

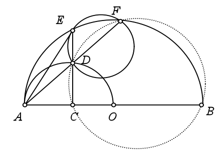
Dado um semicírculo com centro em **O** e diâmetro $\overline{AB}$ e, em seu interior, outro com diâmetro $\overline{OA}$. Trace por um ponto **C** de $\overline{OA}$ uma reta perpendicular ao raio $\overline{OA}$, que cortará o semicírculo pequeno em **D** e o grande em **E** e, finalmente, a reta $\overline{AD}$ que cortará o semicírculo grande em **F**.

Demonstre que o círculo circunscrito ao triângulo ΔDEF é tangente à corda $\overline{AE}$ no ponto **E**.

Solução:

-O triângulo *AEB* é retângulo.

Pelo teorema dos catetos temos que: $\overline{AE}^2 = \overline{AC} \times \overline{AB}$
-O quadrilátero *BCDF* é inscritível, pois seus ângulos opostos *C* e *F* são retos.



- Assim, as retas $\overline{ACB}$ e $\overline{ADF}$ são secantes à circunferência que lhes circunscreve.
- A potência do ponto A a respeito dessa circunferência nos dá: $\overline{AC}. \times \overline{AB} = \overline{AD} \times \overline{AF}$

- Portanto: $\overline{AE}^2 = \overline{AD} \times \overline{AF}$.
E isto que dizer, por potencia de A respeito a circunferência que circunscreve ao triângulo DEF, que a reta $\overline{AE}$ é tangente a circunferência em E.