OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

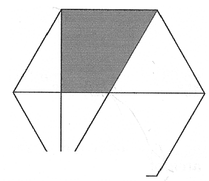
Nível 1 – 5ª e 6ª séries do ensino fundamental

24 de setembro de 2005

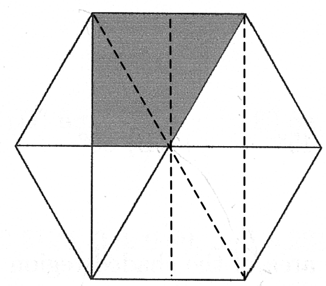
PARTE OBJETIVA (Cada questão vale 10 pontos)

Questão 1

Qual é a fração irredutível que representa a área destacada na figura em função da área total do hexágono convexo regular?



Solução:



Redividindo o hexágono como demonstrado na figura verificamos que são formados 12 triângulos idênticos dos quais apenas 3 estão destacados.

Assim teremos a fração equivalente $\frac{3}{12}$.

Simplificando obtemos: $\frac{1}{4}$

Questão 2

Catolé do Rocha e Nazaré das Farinhas são cidades belíssimas do Nordeste. A estrada que liga essas cidades tem comprimento de exatamente 777 km. A cada quilômetro, uma placa indica a quantos quilômetros de distância a cada uma das cidades a placa está.

Assim, a placa localizada em Catolé do Rocha indica "0 – 777" e a placa encontrada 50 quilômetros depois indica "50 – 727". Por isso, há 778 placas, contando as placas em Catolé do Rocha e em Nazaré das Farinhas.

Para se distrair durante a longa viagem, o professor Fábio das Medalhas conta quantas placas utilizam exatamente dois dígitos distintos. Assim, ela conta a placa "0 – 777", pois ela utiliza apenas os dígitos 0 e 7, mas não conta a placa "50 – 727", pois ela utiliza 4 dígitos (0, 2, 5 e 7).

Quantas placas nosso "valente" Fábio contou durante sua viagem?

Solução:

a) Como a soma das placas deve ser sempre 777;
b) Obviamente a soma dos algarismos das unidades das duas distâncias deve ser sempre 7;
c) Há apenas cinco possibilidades para os dois dígitos: 0 e 7, 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4, 8 e 9.
d) Nos quatro primeiros casos há oito possibilidades para as placas, se usarmos os dígitos x e y:

- *xxx yyy*
- *xxy yyx*
- *xyx yxy*
- *xyy yxx*
- *yxx xyy*
- *yxy xyx*
- *yyx xxy*
- *yyy xxx*

e) Por outro lado, com os dígitos 8 e 9 não podemos colocar nenhum dígito na casa das centenas dos números das placas, logo este caso é impossível.
f) Logo Fábio das Medalhas contou $8 \times 4 = 32$ placas.

Questão 3

Para a subtração abaixo, existem algarismos escondidos como letras, onde cada letra equivale a somente um algarismo e onde letras diferentes representam algarismos diferentes.

Determine o maior valor possível para a soma $\boldsymbol{O+M+E+R+J}$.

	O	**M**	**E**	**R**	**J**
–		**R**	**E**	**7**	**9**
		2	**0**	**0**	**5**

Solução:

a) $O-0=0 \leftrightarrow O=1$. Nesse caso, O "cede" uma unidade para M que "recebe" uma dezena.

b) $J-9=5 \leftrightarrow J=14$. Nesse caso, $J=4$ e R "cede" uma unidade para J que recebe uma dezena e se iguala a 14.

c) $(R-1)-7=0 \leftrightarrow R=8$. Nesse momento destacamos que E não "cede" NADA para R pois $E-E=0$.

d) Pelo mesmo motivo exposto no item anterior M não "cede" nada para E e pelo disposto no item a, M recebe uma dezena de O. Assim teremos a seguinte disposição: $(M+10)-8=2 \leftrightarrow M=0$

e) Como já temos definido o uso dos algarismos 1, 4, 8, 0 (para as letras O, J, R, M respectivamente), restam para valores de E os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9. Pela condição do enunciado, $E=9$.

f) Pelo exposto, a maior soma possível seria: $1+4+8+0+9=22$

Questão 4

A média das idades de vó Ermengarda, vô Paulínio e seus netos Ari, Jupira, Ariovaldo, Aricleme, Astrogildo e Arineide é 26 anos. A média das idades dos netos é 12 anos. Qual a idade de vô Paulínio se ele é 6 anos mais velho que vó Ermengarda?

Solução:

a) Seja S_1 a soma das idades de todos, pelo cálculo da média das idades teremos que: $\frac{S_1}{8}=26 \rightarrow S_1=208 anos$.

b) Seja S_2 a soma das idades dos netos, pelo mesmo raciocínio anterior teremos que: $\frac{S_2}{6}=12 \rightarrow S_2=72 anos$.

c) Seja S_3 a soma das idades dos avós, pela diferença das somas teremos que: $S_3=S_1-S_2=208-72=136 anos$.

d) Seja P a idade de vô paulínio e E a idade de vó Ermengarda, temos que: $S_3=P+E=136 anos$.

e) Pelo enunciado obtemos que: $P=E+6$.

f) Substituindo teremos: $E+6+E=136 \rightarrow 2E=130 \rightarrow E=65 anos$

g) Substituindo teremos: $P=E+6=65+6=71 anos$.

PARTE DISCURSIVA (Cada questão vale 20 pontos)

Questão 5

O matemático alemão Peter Dirichlet desenvolveu, no século XIX, o *princípio das gavetas*. Segundo este princípio, se $n+1$ objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta receberá mais de um objeto.

Por exemplo, em um grupo de 13 crianças (objetos), podemos afirmar que existem pelo menos duas nascidas no mesmo mês (gavetas): como há somente 12 meses, pelo menos um mês deverá conter pelo menos duas crianças.

Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, há sempre pelo menos 5 que nasceram no mesmo mês.

Solução:

Tome por hipótese a prova do contrário, ou seja, queremos provar que NÃO existem pelo menos um mês com no mínimo 5 pessoas.
Assim sendo, teremos que ir distribuindo as pessoas uma a uma pelos meses de janeiro a dezembro. Nesse caso teremos, até a pessoa de ordem 48, 4 pessoas por mês, faltando 2 pessoas ainda para posicionar. A pessoa de ordem 49 seria obrigatoriamente alocada em um mês cuja soma será 5.

Questão 6

Professor Fábio das Medalhas, amante dos esportes aquáticos, construiu duas piscinas em sua mansão em Bangu. A piscina dos "maiores" é retangular e a piscina dos "menores" é circular; a soma das áreas das duas piscinas é 473,04 m^2. A menor medida lateral da piscina retangular mede o mesmo que o diâmetro da piscina circular, enquanto que a maior medida lateral da piscina retangular equivale a cinco vezes o raio da piscina circular. Determine a diferença entre o perímetro das duas piscinas. *(Considere* $\pi = 3,14$*.)*

Solução:

a) Seja x e y respectivamente a menor e a maior medida lateral da piscina retangular e r o raio da piscina circular, a soma das áreas será igual a $xy + \pi r^2 = 473{,}04m^2$.

b) Como $x = 2r$ e $y = 5r$, podemos substituir esses valores na equação anterior obtendo $2r \times 5r + \pi r^2 = 473{,}04m^2$.

c) Operando algebricamente teremos $10r^2 + \pi r^2 = 473{,}04m^2$.

d) Isolando o raio teremos. $r^2 = \dfrac{473{,}04}{10+\pi}m^2$

e) Como $\pi = 3{,}14$, podemos obter um valor inteiro positivo para a fração obtendo $r^2 = 36$, logo $r = \pm\sqrt{36} = \pm 6$. Desprezando o valor negativo, $r = 6m$.

f) Substituindo o valor do raio em x e y obteremos os lados da piscina retangular $x = 2r = 2\times 6 = 12m$ e $y = 5r = 5\times 6 = 30m$.

g) A diferença dos perímetros das duas piscinas poderá ser dado pela expressão: $(2x+2y)-(2\pi r) = (2\times 12 + 2\times 30) - (2\times 3{,}14\times 6) = 84 - 37{,}68 = 46{,}32m$.

Questão 7

O maior edifício do país foi construído na pequena cidade de Tribobó do Norte, com oitocentos andares além do térreo. Cinco elevadores partem deste andar; o elevador **X** para em todos os andares, mas **Y**, **Z**, **W** e **T** param somente nos andares múltiplos de 3, 5, 13 e 19, respectivamente.

a) Mostre que o andar térreo é o único onde os 5 elevadores param.

b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

Solução (a):

a) Tirando o térreo, os elevadores irão se encontrar no andar que equivaler aos múltiplos comuns entre seus saltos.
b) Excetuando-se o elevador X (por parar em todos os andares) os demais saltos são equivalentes a números primos e, portanto, também são primos entre si. O primeiro andar a pararem será equivalente ao MMC entre esses andares.
c) Como os saltos entre os andares equivalem a primos entre si o MMC será igual ao produto entre eles, ou seja, $MMC = 1 \times 3 \times 5 \times 13 \times 19 = 3705$ que é maior que 800, logo, fora o térreo, é impossível que parem todos no mesmo andar.

Solução (b):

a) Pelo descrito anteriormente, para que um grupo pare em um andar, o produto de seus saltos deve ser menor que 800.
b) Podemos formar 5 grupos e então basta analisar a adequação ao limite de 800 andares.
   - $MMC = 3 \times 5 \times 13 \times 19 = 3705$, não serve pois excede o limite.
   - $MMC = 1 \times 5 \times 13 \times 19 = 1235$, não serve pois excede o limite.
   - $MMC = 1 \times 3 \times 13 \times 19 = 741$, serve.
   - $MMC = 1 \times 3 \times 5 \times 19 = 285$, serve, assim como o múltiplo 570.
   - $MMC = 1 \times 3 \times 5 \times 13 = 195$, serve, assim como seus múltiplos 390, 585 e 780.
c) Assim, os andares onde param exatamente 4 elevadores são: 195, 285, 390, 570, 585, 741, e 780.

Questão 8

De acordo com o regulamento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), cada escola deve selecionar, para a segunda fase, 5% do total de alunos inscritos para a primeira fase em cada um dos níveis. Se o número equivalente a esses 5% não for um número inteiro, ele deve ser aproximado para o número inteiro imediatamente superior. Exemplo:

Descrição	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Alunos inscritos na 1ª fase	200	164	19
5% dos alunos inscritos na 1ª fase	10	8,2	0,95
Alunos que poderão fazer a 2ª fase	10	9	1

Uma escola classificou para a segunda fase, em um dos níveis que participava, 26 alunos. Determine a quantidade de participantes dessa escola na primeira fase, sabendo que ela corresponde a um número primo cuja soma dos algarismos vale 8.

Solução:

a) Pelo enunciado temos que $5\% \leq 26$.
b) Assim, o dobro seria $10\% \leq 52$.
c) Para achar a totalidade teríamos $100\% \leq 520$. Como 520 não atende as condições do enunciado (é composto e a soma de seus algarismos é 7), devemos verificar os números inteiros menores que ele cuja a soma de seus algarismos seja 8.
d) No intervalo entre 501 e 519 (5% de 500 representa valor inteiro 25 sendo fora do limite do enunciado) temos apenas dois números que satisfazem essa primeira condição: 503 e 512. Como 512 é par (forma 2k), ele certamente é composto.
e) Resta comprovar que 503 é primo. Podemos usar o Crivo de Eratóstenes ou uma solução mais rápida.
f) Uma prova válida seria utilizar o seguinte algoritmo derivado do próprio crivo de Eratóstenes: dado N, tenta-se dividi-lo, sucessivamente, pelos números primos n = 2, 3, ..., até o maior inteiro inferior à raiz quadrada de N. Se nenhum desses números divide N, então ele é primo. Se N_o divide N, escrevemos $N = N_oN_1$, onde $N_1 < N$, e repete-se o mesmo processo para N_o e N_1. Isto fornece a decomposição completa de N em fatores primos.
g) Assim, dividindo 503 (N) pelos primos inferiores a sua raiz quadrada (≅22,4), não encontraremos divisão inteira exata (Sem restos), o que prova que 503 é primo e, portanto, satisfaz as condições do problema.

Importante:

O grande problema deste processo é que, para valores de N muito grandes, o algoritmo exige muito tempo e muitos cálculos para decidir se N é primo ou composto. Para o problema em questão usamos o seguinte conjunto de números primos P={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.