OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2004

23 de outubro de 2004.

Nível 3 – (1ª e 2ª séries do ensino médio)

QUESTÃO 1

ABC é um triângulo acutângulo de base $\overline{AB} = b$ e altura $\overline{CH} = h$. Infinitos quadrados são construídos dentro de ABC de tal forma que cada quadrado possui dois de seus vértices sobre os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo e os outros dois vértices apoiados sobre o quadrado anterior (o primeiro quadrado está apoiado sobre $\overline{AB}$).

a) Qual é a soma das áreas de todos os quadrados, em função de b e h?
b) Qual é a maior razão possível entre a área do primeiro quadrado e a área do triângulo?

QUESTÃO 2

No Iraque haverá uma nova loteria, nos moldes da Mega-Sena: toda semana são sorteados 7 números de 1 a 69. Para o apostador ganhar o prêmio, os sete números sorteados devem estar entre aqueles escolhidos pelo apostador.

a) A aposta simples, na qual o apostador escolhe exatamente 7 números, custa 1 dinar. Qual é a chance de ele ganhar com esta aposta?

b) A aposta múltipla custa 30 dinares e o apostador escolhe 9 números. Se n apostas simples equivalem à aposta múltipla (isto é, dão ao apostador a mesma chance de ganhar que uma aposta múltipla), é mais barato fazer a aposta múltipla ou n apostas simples?

QUESTÃO 3

Quatro carros **A**, **B**, **C**, **D** viajam a velocidade constante em uma mesma estrada. **A** ultrapassa **B** às 8h, ultrapassa **C** às 9h e encontra **D** às 10h. **D** encontra **B** às 12h e encontra **C** às 14h. Determine quando **B** ultrapassa **C**.

QUESTÃO 4

Seja P um polinômio real não constante tal que, para todo x real,

$$P(2x)P(-2x)P(x^2) = P(-4x^2)(x^2-4)^2$$

a) determine o grau de P.
b) encontre todos os possíveis P.

(Um polinômio real não constante de grau n é uma função $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $n \neq 0$ e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são reais, $a_n \neq 0$.)

QUESTÃO 5

Encontre todas as soluções da equação $m^3 - 16 = 5(n+2)2^n$, onde m e n são inteiros positivos.

QUESTÃO 6

Duas circunferências secantes, Γ_1 e Γ_2, se cortam em A e B. Duas outras circunferências, Γ_3 e Γ_4, tangenciam Γ_1 internamente em A e B, respectivamente, e cortam Γ_2 novamente em P e Q, respectivamente. Suponha que as retas tangentes a Γ_3 e Γ_4 em P e Q sejam concorrentes e se cortem em um ponto R. Prove que $\overline{PR} = \overline{QR}$.