OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2003

Nível 3 – (1^a e 2^a séries do ensino médio)

2^a Fase – Prova Final – 27 de setembro de 2003.

Folha de Questões

1) As funções

$$\text{arcsen: } [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \text{arccos: } [-1, 1] \to [0, \pi]$$

são definidas como as funções inversas, respectivamente, das funções

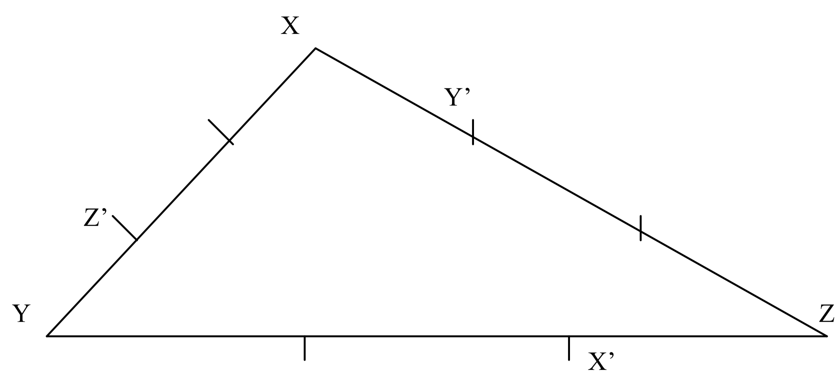
$$\text{sen: } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \quad \text{e} \quad \text{cos: } [0, \pi] \to [-1, 1].$$

a) Verifique que, para todo $x \in [-1,1]$ temos $(\operatorname{arcsen} x) + (\arccos x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Determine os valores máximo e mínimo da função f: $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (\text{arcsen } x)^3 + (\text{arccos } x)^3.$$

2) Dado um triângulo XYZ, denomina-se "filho" de *XYZ* o triângulo *X'Y'Z'* tal que *X'* Pertence à *YZ*, *Y'* pertence *XZ*, *Z'* pertence à *XY* e *XZ'* = 2*YZ'*; *ZY'* = 2*XY'* e *YX'* = 2*ZX'*. Dado um triângulo *ABC* qualquer seja, $A_1B_1C_1$. *o seu filho, seja* $A_2B_2C_2$ o filho de $A_1B_1C_1$, e, mais geralmente, seja $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ o filho de $A_nB_nC_n$. Prove que o baricentro do triângulo *ABC* pertence ao interior de $A_nB_nC_n$ para todo *n* inteiro positivo.



3) Encontre todos os números naturais primos *N* de 4 algarismos que satisfaçam simultaneamente as três condições abaixo.

   I. *N* < 6000;
   II. Ao dividirmos *N* por 100 o resto é um número de um algarismo;
   III. Se invertermos a ordem dos algarismos de *N* obtemos um número N_1 tal que $N_1 - N = 999$.

4) Como explicou o Professor Carlos Frederico “Fred” Palmeira em um importante programa esportivo da TV brasileira, o goleiro de futebol pode conseguir uma vantagem significativa adiantando-se alguns passos na hora da cobrança do pênalti. Apesar de que as regras do jogo não permitem essa atitude, é comum que os juízes sejam tolerantes em relação a ela.

Suponha que em uma cobrança de pênalti a probabilidade de o goleiro permanecer na linha do gol seja $\frac{1}{8}$, e a probabilidade de ele avançar k passos seja igual a $\frac{1}{2^k}$, para k = 1, 2 ou 3 (nenhum goleiro avança mais de 3 passos) e que, neste caso, a probabilidade de o cobrador fazer o gol seja de $\frac{(25-k^2)}{30}$ (se o goleiro não avançar a probabilidade de fazer o gol seria $\frac{25}{30}$) . Suponha também que, caso o cobrador não consiga fazer o gol, a probabilidade de o juiz mandar repetir a cobrança seja $\frac{k}{5}$, onde k é o número de passos avançados pelo goleiro. Finalmente, considere que se o juiz mandar repetir 2 vezes, o goleiro desiste de tentar avançar.

Determine a probabilidade de o cobrador fazer o gol em uma determinada cobrança de pênalti.

5) a) Mostre que $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen} x - 4(\operatorname{sen} x)^3$

b) Calcule $96(\operatorname{sen} 10^\circ)^5 + 16(\operatorname{sen} 10^\circ)^4 - 52\operatorname{sen} 10^\circ + 10$.