OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2003

<u>Nível 2 – (7ª e 8ª séries do ensino fundamental)</u>

2ª Fase – Prova Final – 27 de setembro de 2003.

<u>Folha de Questões</u>

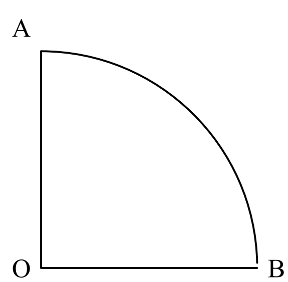
1) Resolva as questões a seguir:

   a) Determine o menor número inteiro positivo de quatro algarismos tal que o número de divisores inteiros e positivos do número é igual ao seu primeiro algarismo.

   b) Determine o menor número inteiro positivo e composto de quatro algarismos tal que o número de divisores inteiros e positivos do número é igual ao seu primeiro algarismo.

2) O Professor Fred quer fazer o seguinte jogo com seus alunos. Inicialmente ele escreve no quadro os números 2, 10, 25, 30, 49, 51. Em cada rodada do Jogo, o professor Fred escolhe um aluno que vai ao quadro, apaga dois números que já estão escritos e no seu lugar escreve o M.M.C. e o M.D.C. desses números escolhidos. É possível que, após algumas rodadas, os números sejam 8, 15, 34, 25, 3, 5? Justifique sua resposta.

3) A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1. No arco AB consideramos dois pontos P e Q de forma tal que a reta PQ é paralela a reta AB. Se X e Y são os pontos de interseção da reta PQ com as retas AO e OB respectivamente. Calcular $PX^2 + PY^2$.



4) Briot (matemático inglês-1817/1882) e Ruffini (matemático italiano-1765/1822) desenvolverem métodos para achar soluções para as equações chamadas recíprocas. Para melhor entender, veja a definição:

Seja a **<u>equação racional inteira</u>** $\mathbf{a_0.x^{n} + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + \ldots + a_n = 0}$, ordenada segundo as potências decrescentes de x, com a_0, a_1, ... , a_n números reais sendo $a_0 \neq 0$ e n inteiro positivo.

Diz-se que esta equação é **recíproca** se e somente se <u>os termos eqüidistantes dos extremos</u> forem <u>iguais ou simétricos (opostos)</u>. Sendo iguais, teremos uma equação recíproca de 1ª espécie e, sendo simétricos (opostos), teremos uma equação recíproca de 2ª espécie.

a) Se $y = x + \frac{1}{x}$ calcule, em função de y, as expressões $x^2 + \frac{1}{x^2}$ e $x^3 + \frac{1}{x^3}$

b) Determine todas as raízes reais da equação abaixo: $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

c) Determine todas as raízes reais de $x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$

5) Dado um triângulo XYZ, denomina-se "filho" de *XYZ* o triângulo *X'Y'Z'* tal que *X'* Pertence à *YZ*, *Y'* pertence *XZ*, *Z'* pertence à *XY* e *XZ'* = 2*YZ'*; *ZY'* = 2*XY'* e *YX'* = 2*ZX'*. Dado um triângulo *ABC* qualquer seja, $A_1B_1C_1$. *o seu filho, seja* $A_2B_2C_2$ o filho de $A_1B_1C_1$, e, mais geralmente, seja $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ o filho de $A_nB_nC_n$. Prove que o baricentro do triângulo *ABC* pertence ao interior de $A_nB_nC_n$ para todo *n* inteiro positivo.