OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2002
2ª FASE – 31 de agosto de 2002

NÍVEL 2 – 7ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental

Instruções:

- ✓ A Prova é composta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- ✓ Todas as soluções devem ser justificadas.
- ✓ Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- ✓ A Prova tem a duração de 4 horas.
- ✓ Não é permitido o uso de calculadora.
- ✓ Você deve ter recebido uma folha de papel almaço pautado, estas folhas de instruções e questões, e folhas sem pauta. Na folha de papel almaço escreva apenas seu nome, endereço de casa, telefone de casa, nome do seu colégio, o nível em que você está participando (1, 2 ou 3) e a sua quantidade de acertos da 1ª fase.
- ✓ Use as folhas sem pauta para rascunho e para as soluções definitivas.
- ✓ Use uma folha para cada questão.
- ✓ Escreva no alto de cada folha seu nome e que questão está sendo resolvida.
- ✓ Escreva seu nome em todas as folhas que usar.
- ✓ Se para alguma questão você usar mais de uma folha, escreva na segunda folha seu nome e "continuação da questão ..."
- ✓ Ao entregar a prova, coloque todas as folhas que você tiver usado, inclusive os rascunhos, dentro da folha de papel almaço.
- ✓ Os rascunhos poderão ser consultados em caso de dúvida na hora da correção da sua prova.

PROBLEMA 1:

Duas formiguinhas, mãe e filha, passeiam de um ponto A até um ponto B sobre uma armação de arame em formato circular e de dimensões desprezíveis para análise. Existe uma outra armação similar, externa e concêntrica àquela primeira onde as formiguinhas caminhavam.

As duas travam o seguinte diálogo:

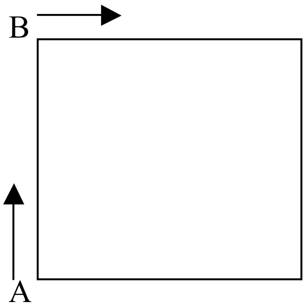
Filha: Mãe! Não seria melhor caminharmos até a outra armação, caminharmos por ela até um determinado ponto e depois voltarmos à armação em que estamos? O caminho não seria mais curto?

Mãe: Olha minha filha, isso está correto para alguns ângulos centrais, mas errado para outros.

Para qual intervalo de ângulos a proposta da filha é válida e para qual intervalo não serve?

Observação: A transferência entre as circunferências é feita de forma que o trajeto seja perpendicular a duas retas imaginárias que tangenciem externamente as duas circunferências.

PROBLEMA 2:
Dois corredores partem simultaneamente dos pontos A e B situados nos vértices de um quarteirão em forma de quadrado. Seguem percorrendo o perímetro do quarteirão no sentido das setas. O lado do quadrado é de 20m e a velocidade do corredor que partiu de B é igual a 80% da velocidade do corredor que partiu de A. A corrida termina no momento em que um dos corredores chega ao seu próprio ponto de partida.



a) No momento que a corrida termina, qual a distância entre os dois corredores?
b) Durante a corrida, qual foi a menor distância **(em linha reta)** entre os dois corredores?

PROBLEMA 3:
Considere a seqüência de números 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, ..., onde o primeiro termo é igual a 0, o segundo é igual a 1, o terceiro é igual a 1 e cada número a seguir é a soma dos três anteriores (por exemplo, o sexto termo é 7 = 4+2+1; o sétimo termo é 13 = 7+4+2; etc.).

a) Mostre que o 2001-ésimo elemento desta seqüência não é primo.
b) Mostre que o 2002-ésimo elemento desta seqüência não é primo.

Agora imagine que usamos a mesma regra mas podemos começar com outros três números naturais ao invés de 0, 1 e 1.

c) O sétimo termo pode ser 2002? Explique.
d) O décimo-quinto termo pode ser 2002? Por que?

PROBLEMA 4:
Seu Manoel é dono de uma adega e vende determinadas misturas de vinho. Ele dispõe em seu estoque de um vaso onde há 12 litros de vinho e 18 litros de água e de outro onde há 9 litros de vinho e 3 litros de água.
Um cliente fez um pedido especial e Seu Manoel se viu com o seguinte dilema: Quantos litros deveria tirar, de cada vaso, para obter uma mistura com 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?