

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2002
2ª FASE – 31 de agosto de 2002

NÍVEL 1 – 5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental

Instruções:

- ✓ A Prova é composta de 5 questões discursivas, todas de igual valor.
- ✓ Todas as soluções devem ser justificadas.
- ✓ Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- ✓ A Prova tem a duração de 4 horas.
- ✓ Não é permitido o uso de calculadora.
- ✓ Você deve ter recebido uma folha de papel almaço pautado, estas folhas de instruções e questões, e folhas sem pauta. Na folha de papel almaço escreva apenas seu nome, endereço de casa, telefone de casa, nome do seu colégio, o nível em que você está participando (1, 2 ou 3) e a sua quantidade de acertos da 1ª fase.
- ✓ Use as folhas sem pauta para rascunho e para as soluções definitivas.
- ✓ Use uma folha para cada questão.
- ✓ Escreva no alto de cada folha seu nome e que questão está sendo resolvida.
- ✓ Escreva seu nome em todas as folhas que usar.
- ✓ Se para alguma questão você usar mais de uma folha, escreva na segunda folha seu nome e “continuação da questão ...”
- ✓ Ao entregar a prova, coloque todas as folhas que você tiver usado, inclusive os rascunhos, dentro da folha de papel almaço.
- ✓ Os rascunhos poderão ser consultados em caso de dúvida na hora da correção da sua prova.

PROBLEMA 1:

Diante da tumba de um rei antigo existia um enigma que somente os melhores calculistas da época poderiam descobrir. Esse enigma era a chave de acesso aos mais incríveis tesouros de seu reinado que ali estariam escondidos.

Ao tentar acessar o tesouro os exploradores se deparavam com a seguinte situação:

Existiam mais de mil pedras numeradas uma a uma sobre um altar e o explorador deveria retirar apenas uma e que fosse a correta, caso contrário uma maldição o condenaria à morte. A escolha estava baseada no enigma.

O enigma estava escrito em uma língua da época, mas os estudiosos conseguiram decifrá-lo no seguinte:

“O numeral X possui exatamente 60 divisores distintos, inteiros e positivos. Ele pode ser escrito de várias formas sendo que aqui se apresenta da seguinte maneira, $X = 4^2 \times 9 \times 5 \times 7^y$. A pedra a ser escolhida é aquela que representa o maior divisor comum entre a soma e o produto dos divisores de X .”

Qual a pedra a ser escolhida para se ter acesso ao tesouro sem ser condenado à morte?

PROBLEMA 2:

No pátio da escola de Pedro resolveu-se separar os espaços de forma que cada aluno possa expor seus trabalhos de pintura em varais e que o público possa vê-los. A professora, com um pedaço de barbante, pediu para que os alunos Alovino, Benavino, Carolino e Dionino segurassem o barbante formando um retângulo (ABCD).

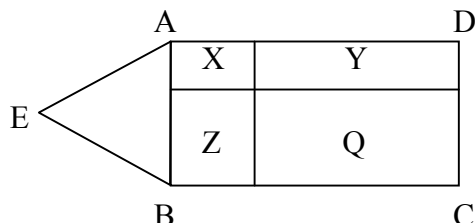
Após isso, a professora foi alertada pelos alunos que outro aluno, o Ecovino, ainda não tinha seu varal para apresentação. A professora tomou a seguinte decisão: cortou outro pedaço de barbante e pediu que Alovino e Benavino segurassem juntamente com Ecovino.

Ecovino percebeu posteriormente que a distância entre ele e os colegas Alovino e Benavino era a mesma e que também era igual à distância entre eles.

A professora percebeu que, para melhor utilizar o espaço selecionado era necessário subdividir o retângulo maior de acordo com a quantidade de trabalhos elaborados. Para isso, amarrou mais dois barbantes paralelos aos lados do retângulo maior formando quatro retângulos menores que chamou de X, Y, Z e Q cujos perímetros estão representados abaixo pelos numerais correspondentes. Responda ao que se pede:

$X = 1m$, $Y = 2m$, $Z = 2m$.

- Qual o perímetro do retângulo Q?
- É possível determinar o perímetro do pentágono EABCD? Como?



PROBLEMA 3:

Em um importante julgamento, Paulo, Mário e Jorge são acusados de cometerem um crime. Durante o julgamento, quando interrogados, cada um deles afirmou o seguinte sobre o ocorrido:

Paulo: eu e Mário somos inocentes.

Mário: Paulo é inocente e Jorge culpado.

Jorge: Eu sou inocente e Paulo é culpado.

Após o interrogatório o juiz chamou a testemunha principal do crime e ouviu, sobre o caso em questão, o seguinte relato:

Testemunha: Um dos acusados mentiu duas vezes, um deles falou a verdade duas vezes e o outro mentiu uma vez e disse a verdade na outra vez.

Baseado nisso o juiz, hábil em lógica, descobriu o culpado.

Diga, justificando o raciocínio lógico utilizado, o nome do criminoso.

PROBLEMA 4:

Escreva o número a seguir como uma fração de numerador e denominador inteiros.

$$\sqrt[3]{\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + \dots + 1000 \times 2000 \times 4000}{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + 3 \times 9 \times 27 + \dots + 1000 \times 3000 \times 9000}}$$

PROBLEMA 5:

Seu Manoel é dono de uma adega e vende determinadas misturas de vinho. Ele dispõe em seu estoque de um vaso onde há 12 litros de vinho e 18 litros de água e de outro onde há 9 litros de vinho e 3 litros de água.

Um cliente fez um pedido especial e Seu Manoel se viu com o seguinte dilema: Quantos litros deveria tirar, de cada vaso, para obter uma mistura com 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?