OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2000
2ª FASE – 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 3 – Ensino Médio

Instruções:
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A Prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
Forme uma sucessão de algarismos do seguinte modo: inicia-se com um número de dois algarismos, multiplicam-se esses dois algarismos, escreve-se à direita este resultado, e em seguida prossegue-se indefinidamente, sempre multiplicando os dois últimos algarismos obtidos. Por exemplo, começando com 67, obtém-se 6742816.... Se agora começarmos com 77, qual será o 2000º algarismo da sucessão?

PROBLEMA 2:
Duas pessoas jogam o seguinte jogo. Inicialmente, há duas pilhas de balas, uma com 21 e outra com 20 balas. O primeiro jogador escolhe uma das duas pilhas, come todas as balas desta pilha, e divide a outra pilha em duas (não necessariamente com o mesmo número de balas). Em seguida, o outro jogador segue o mesmo procedimento com as duas pilhas de balas que restam, e assim sucessivamente. O jogo acaba quando um jogador não consegue mais realizar este procedimento.

1) Existe uma estratégia vencedora para o jogador que começa?
2) Se em vez de 21 e 20, uma pilha contém inicialmente u balas e a outra, v balas, com $u > v > 1$, existe uma estratégia vencedora para o jogador que começa?

PROBLEMA 3:
Determine o único número inteiro **N** de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições :
(1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
(2) para todo inteiro positivo $n = 2, 3, 4, ..., 9$, o número formado pelos n primeiros algarismos de **N** (da esquerda para a direita) é divisível por n.

PROBLEMA 4:
O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca-se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca-se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M.
1) Mostre que M é o ponto médio de PQ.
2) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos APM e MCQ.