OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2000
2ª FASE – 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 2 – 7ª e 8ª Séries

Instruções:
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A Prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
De quantas maneiras se pode escrever 2000 como a diferença de dois quadrados perfeitos (isto é, quadrados de números inteiros)?

PROBLEMA 2:
Antônio e Paulo disputam um jogo, com as seguintes regras. Dois números naturais são escritos no quadro. Antônio calcula a diferença entre o maior e o menor desses dois números, e escreve o resultado no quadro. Em seguida, Paulo escolhe dois números que que já estejam no quadro e escreve no quadro a diferença entre o maior e o menor, desde que o resultado não repita um número que já esteja no quadro. Em seguida, Paulo e Antônio continuam a agir assim, ora um, ora outro. O jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais número para escrever, e então este jogador é o perdedor. Por exemplo, se os números iniciais forem 5 e 3, Antônio escreve 2, em seguida Paulo só pode escrever 1, e Antônio só pode escrever 4. Paulo então perde, pois não tem mais o que escrever. Agora, os números 57 e 75 estão escritos inicialmente no quadro, e Antônio começa o jogo. Pode-se garantir que um dos dois vai perder? Pode-se prever o número de jogadas em que o jogo vai terminar?

PROBLEMA 3:
1) Mostre que os números inteiros de 1 a 16 podem ser dispostos em linha numa certa ordem, sem repetir nenhum, de modo que a soma de dois adjacentes (vizinhos) quaisquer seja um quadrado perfeito (isto é, o quadrado de um inteiro).
2) Mostre que este procedimento é impossível, se os números estiverem sobre uma circunferência.

PROBLEMA 4:
O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca-se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca-se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M.
Mostre que M é o ponto médio de PQ.