OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 1999
2ª FASE – 25 de Setembro de 1999
NÍVEL 3 – Ensino Médio

Instruções:

5) ***A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.***
6) ***Todas as soluções devem ser justificadas.***
7) ***Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.***
8) ***A Prova tem a duração de 4 horas.***
9) ***Não é permitido o uso de calculadora.***

PROBLEMA 1:

Mister M pediu a uma pessoa da platéia: "Escreva num papel (sem que eu veja) o número de seu aniversário, como um número de 8 algarismos" (por exemplo, se o aniversário da pessoa fosse 23 de outubro de 1982, ela teria escrito o número 23101982). "Agora, misture os algarismos desse número em qualquer ordem formando um segundo número com 8 algarismos" (no exemplo acima, a pessoa poderia ter formado, por exemplo, o número 13208291; também é admitido ter zeros à esquerda, e ignorá-los). "Agora, subtraia o menor do maior; em seguida, do resultado, omita um algarismo (diferente de 0) a sua escolha, e diga-me, numa ordem qualquer, os outros que ficaram." Após seguir as instruções, o espectador ditou os algarismos que sobraram: 0; 0; 1; 1; 2; 5; 7. E então, Mister M adivinhou corretamente o algarismo que faltava. Qual foi o algarismo que Mister M adivinhou? E qual foi o truque?

PROBLEMA 2:

Existem em uma rua 17 casas numeradas, da primeira à ultima, com números naturais consecutivos. Um incêndio destruiu uma das casas e, com isto, a diferença entre a antiga média dos números das casas e a nova média foi de 0,25. Qual foi a casa queimada?

PROBLEMA 3:

Em um triângulo ABC no qual o ângulo $\angle BAC$ é igual a 60°, escolhe-se um ponto do seu interior de modo que os ângulos $\angle APB$, $\angle BPC$ e $\angle CPA$ são iguais a 120°. Se $AP = a$, determine a área do triângulo BPC.

PROBLEMA 4:

A seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... é obtida a partir dos dois primeiros termos, de modo que cada termo é a soma dos dois anteriores. O mesmo ocorre com a seqüência 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...
Mostre que:

a) nenhum termo da segunda seqüência é múltiplo de 5;
b) dado qualquer número inteiro positivo n, existe algum termo da primeira seqüência que é múltiplo de n.