

**OLIMPIÁDA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 1998**  
**2ª FASE – 7 de Novembro de 1998**  
**NÍVEL 3 – Ensino Médio**

**Instruções**

- A Prova tem uma duração de 4 horas.
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.

**PROBLEMA 1**

A Diretoria de um Banco é composta por um Diretor, um Vice-Diretor e quatro Chefes de Setor. O Diretor resolve instalar um novo cofre. Manda fazer várias fechaduras e distribui as chaves de modo que:

- Cada chave abre exatamente uma fechadura.
  - O cofre só é aberto se forem abertas todas as suas fechaduras.
  - O Diretor possa abrir sozinho o cofre.
  - O Vice-Diretor só possa abrir o cofre juntamente com um dos Chefes de Setor.
  - Os Chefes de Setor só possam abrir o cofre em grupos de três.
- a) Qual o número mínimo de fechaduras que se devem colocar no cofre para que este esquema seja possível?
- b) Nesse caso, quantas chaves cada um deve ter?

**PROBLEMA 2**

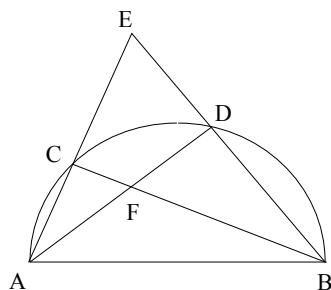
- a) Encontre todas as soluções inteiras e positivas de  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ , onde  $p$  é um número primo [cada solução é um par ordenado  $(x; y)$ ].
- b) Encontre pelo menos 5 soluções inteiras e positivas de  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1998}$ .

**PROBLEMA 3**

Mostre que o número  $N = 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$  é divisível por 1998.

**PROBLEMA 4**

Os pontos C e D estão em um semi-circunferência de diâmetro AB como mostra a figura abaixo:



Os pontos C e D podem mover-se sobre a semi-circunferência, mas o arco CD é sempre constante e igual a  $70^\circ$ .

- a) Explique por que a reta EF é sempre perpendicular a AB.
- b) Calcule os ângulos AEB e AFB.
- c) Determine o conjunto das posições assumidas pelo ponto E quando os pontos C e D se movem sobre a semi-circunferência.