

OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 1998
2^a FASE – 7 de Novembro de 1998
NÍVEL 2 – 7^a e 8^a Séries

Instruções

- A Prova tem uma duração de 4 horas.
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.

PROBLEMA 1

100 pessoas jogam a seguinte variação do jogo de bingo: Inicialmente, cada jogador escreve os números de 1 a 100, na ordem que desejar. Em seguida, o diretor do jogo sorteia sucessivamente os números de 1 a 100, em qualquer ordem. Cada jogador ganha 1 real por cada número de sua seqüência que apareça na mesma posição na seqüência sorteada. Sabendo que todos os participantes receberam quantias diferentes, prove que algum deles recebeu exatamente 100 reais.

PROBLEMA 2

Um dragão tem 3996 cabeças. Um cavaleiro tem uma espada capaz de cortar 300 cabeças, mas quando ele a usa, surgem imediatamente outras 84 cabeças; e tem uma outra espada capaz de cortar 100 cabeças, mas quando ele a usa, surgem imediatamente outras 370 cabeças. Pode o cavaleiro, através de uma sucessão de golpes de suas espadas, reduzir o número de cabeças do dragão a 1998? Como?

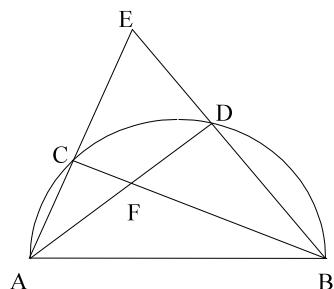
PROBLEMA 3

Um quadrado multiplicativo tem como propriedade que qualquer linha, qualquer coluna e as duas diagonais têm o mesmo produto. Isto é, pela figura abaixo : $ABC = DEF = GHI = ADG = BEH = CFI = AEI = CEG = K$ Mostre que se os números colocados no quadrado forem inteiros, então K (o produto comum) deve ser um cubo perfeito.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

PROBLEMA 4

Os pontos C e D estão em um semi-circunferência de diâmetro AB como mostra a figura abaixo:



Os pontos C e D podem mover-se sobre a semi-circunferência, mas o arco CD é sempre constante e igual a 70° .

- Explique por que a reta EF é sempre perpendicular a AB.
- Calcule os ângulos AEB e AFB.
- Determine o conjunto das posições assumidas pelo ponto E quando os pontos C e D se movem sobre a semi-circunferência.